

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DE NANCY I

pour l'obtention du grade de

DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

par

Jean-Pierre DOREMUS

SUJET

**Contribution à l'étude de la stabilité des fluides
de l'espace des phases**

Soutenue publiquement le 16 Juin 1973 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury :

Président : M. A. HADNI

Invités : MM. G. LAVAL
M. HENON

Examineurs : MM. G. BAUMANN
M. FEIX

LOUDART CLÉMENT
RELIEURS

11, Rue Sainte-Anne, 11
Tél. 52.80.09 - NANCY

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DE NANCY I

pour l'obtention du grade de

DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

par

Jean-Pierre DOREMUS

SUJET :

**Contribution à l'étude de la stabilité des fluides
de l'espace des phases**

Soutenue publiquement le 16 Juin 1973 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury :

Président : M. A. HADNI

Invités : MM. G. LAVAL
M. HENON

Examineurs : MM. G. BAUMANN
M. FEIX

Digitized by the Internet Archive
in 2026



A mes parents

A ma femme

Je prie Monsieur le Professeur BAUMANN de bien vouloir trouver ici l'expression de ma profonde reconnaissance pour m'avoir accueilli dans son laboratoire de Physique Théorique, ainsi que pour l'intérêt et le soutien qu'il n'a cessé de m'accorder.

J'exprime ma profonde gratitude à Monsieur FEIX, Maître de recherches au Centre National de la Recherche Scientifique, qui a dirigé ce travail. Ses encouragements constants et son dynamisme ont permis la réalisation de ce travail.

Je remercie bien vivement Monsieur le Professeur HADNI de m'avoir fait l'honneur d'accepter la présidence de ce jury.

Je suis très reconnaissant envers Monsieur LAVAL, Maître de Recherches, qui a bien voulu accepter la tâche ingrate d'examiner ce travail. Je l'en remercie, ainsi que pour sa participation au jury.

Je remercie également Monsieur HENON, Directeur de Recherches, pour m'avoir fait l'honneur de venir à Nancy participer au jury, et pour les remarques constructives qu'il a formulées.

Une partie de ce travail a été réalisée en collaboration avec Monsieur FINZI, de l'Association Euratom-CEA à Grenoble, que je tiens à remercier.

Je remercie également tous mes camarades de laboratoire pour leur esprit d'entr'aide.

Je remercie enfin Mademoiselle MOTSCH, qui a bien voulu assurer la dactylographie de cette thèse.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION	1
I MODELES ET PROBLEMES POUR LES FLUIDES DE L'ESPACE DES PHASES	8
1) Etude des états stationnaires :	9
a) le modèle partiellement thermalisé	9
b) les modèles polytropiques	9
c) le modèle d'EINSTEIN	10
d) le modèle hydrodynamique	11
e) le modèle du "Water-Bag"	11
2) Théorie linéaire :	16
a) les problèmes de valeur initiale pour un équilibre homogène	16
b) l'analyse en modes	17
c) méthode variationnelle	18
3) La simulation numérique :	24
a) méthodes lagrangiennes	25
b) méthodes eulériennes	26
c) utilisation du modèle "Water-Bag"	26
II STABILITE DES SYSTEMES STELLAIRES A SYMETRIE SPHERIQUE	28
A) <u>Cas où l'équilibre ne dépend que du premier invariant ϵ</u>	29
B) <u>Cas où l'équilibre dépend des 2 invariants ϵ et I</u>	35

1) "Water-Bag" à un contour	36
a) état stationnaire	39
b) théorie linéarisée autour de l'équilibre	40
c) étude de la stabilité	43
2) Multiple "Water-Bag"	46
a) étude de l'état stationnaire	49
b) équations linéarisées autour de l'équilibre	50
c) étude de la stabilité	52
C) <u>Conclusion</u>	54
 III STABILITE DES SYSTEMES STELLAIRES A SYMETRIE CYLINDRIQUE	 56
A) <u>Stabilité des systèmes cylindriques en rotation uniforme</u>	57
1) Le modèle "Water-Bag" simple	57
2) Stabilité du multiple "Water-Bag" en rotation uniforme	60
B) <u>Stabilité des systèmes bidimensionnels dépendants des 2 invariants ϵ, I</u>	69
1) Etude de l'état stationnaire	71
2) Equations linéarisées autour de l'équilibre	72
3) Etude de la stabilité	73
C) <u>Conclusion</u>	74

IV ETUDE DES SYSTEMES UNIDIMENSIONNELS PLANS EN DYNAMIQUE STELLAIRE ET EN PLASMAS.

	75
A) <u>Classification des états stationnaires</u>	76
1) Systèmes stellaires	76
2) Plasmas	78
a) normalisation	78
b) classification des états stationnaires	80
B) <u>Expériences numériques</u>	89
1) Systèmes stellaires	89
2) Plasmas	89
C) <u>Théorie linéarisée autour de l'équilibre</u>	94
1) Equations linéarisées	94
2) Conditions aux limites	96
a) equilibres apériodiques	96
b) équilibres périodiques	98
D) <u>Méthodes d'étude de la stabilité</u>	100
1) Méthode du mode marginal $\omega^2 = 0$	100
a) principe	100
b) exemple d'application de ce critère	104
2) Méthode de calcul des fréquences propres	107
E) <u>Etude de la stabilité des systèmes apériodiques</u>	112
1) Existence de modes particuliers	113
2) Calcul des fréquences ω , discussion sur la stabilité	115

a) analyse commune aux systèmes stellaires et aux plasmas	115
b) particularités propres aux plasmas	126
3) Comparaison avec le critère d'instabilité de MINARDI	128
4) Conclusion	128
 F) <u>Stabilité des solutions périodiques en plasmas</u>	129
1) Stabilité de systèmes formés d'une seule période	129
2) Stabilité des équilibres périodiques infinis	133
3) Conclusion	137
 G) <u>Stabilité d'une classe d'équilibres stellaires</u>	137
1) Construction de l'équilibre	137
2) Etude de la stabilité	139
3) Conclusion	143
 H) <u>Conclusion</u>	143
 CONCLUSION GENERALE	145
 ANNEXE	147
 I <u>Calcul de l'équilibre d'un multiple "Water-Bag" unidimensionnel</u>	147

1) Calcul des périodes τ (ϵ)	148
2) Calcul de l'équilibre	148
II <u>Calcul des valeurs propres ω^2 du système</u>	150
1) Calcul des modes découplés	150
2) Calcul des valeurs propres ω^2	151
III <u>Calcul de l'intégrale de MINARDI</u>	151
1) Cas d'un système stellaire	152
a) calcul de L	152
b) calcul de $\bar{\phi}$	152
c) calcul de Φ	153
2) Cas d'un plasma	153
BIBLIOGRAPHIE	155

INTRODUCTION

Nous réunirons dans ce travail deux catégories de systèmes apparemment très différents : les Systèmes Stellaires et les Plasmas. Cependant pour l'étude des phénomènes collectifs ces systèmes peuvent tous deux être assimilés à des ensembles de particules évoluant suivant les lois de la Mécanique Classique, les seules forces considérées étant les forces de NEWTON ou de COULOMB. Il s'agit alors du classique problème des N corps.

Système Stellaire

Une galaxie est constituée principalement d'étoiles, de gaz interstellaire (neutre ou ionisé), de poussière interstellaire et de particules de haute énergie (rayons cosmiques, électrons relativistes). En fait, la masse de la galaxie est due principalement aux étoiles et en première approximation nous pouvons négliger les autres constituants.

A l'intérieur des galaxies les étoiles peuvent se grouper en amas. Ces amas sont de deux types :

- les amas globulaires comportant un nombre assez important d'étoiles (de l'ordre de 10^5).

- les amas ouverts ou amas galactiques qui contiennent un nombre plus petit d'étoiles (généralement de l'ordre de 10^3).

D'autre part, les galaxies elles-mêmes sont parfois associées pour former des amas de galaxies.

Dans les systèmes stellaires les forces d'origine gravitationnelle sont les plus importantes, nous négligerons tous les autres effets (effets relativistes, forces électromagnétiques...) et nous supposerons le système isolé.

Un système stellaire sera donc, pour nous, un ensemble formé de N étoiles, la seule force agissante étant l'attraction mutuelle entre les N étoiles. Chaque étoile est donc soumise à l'attraction simultanée de toutes les autres étoiles, la force subie par cette étoile peut être décomposée en 2 parties (bien que la séparation soit arbitraire et délicate), la première est une force régulière correspondant à un potentiel continu $U(\vec{x}, t)$ qui ignore les fluctuations dûes au caractère quasi ponctuel des masses stellaires (autrement dit qui ignore l'indivisibilité des particules) et qui ne tient compte que des effets collectifs. La deuxième partie résulte des fluctuations qui sont responsables des "collisions" entre étoiles individuelles. Les collisions ont des effets cumulatifs et l'effet résultant est important au bout d'un temps t_r appelé temps de relaxation. De même aux effets collectifs on peut associer une autre échelle du temps : t_c qui est approximativement le temps que met une étoile pour traverser le système stellaire. CHANDRASEKHAR /1/ a établi la relation liant ces 2 échelles de temps, on a approximativement :

$$\frac{t_c}{t_r} \sim 40 \cdot \frac{\log N}{N}$$

Dans la plupart des systèmes stellaires N est grand et l'on a $t_r \gg t_c$. Dans le tableau suivant (LECAR /2/), t_c est donné par $t_c = 10^7 \times \rho^{-1/2}$ où ρ est la densité exprimée en masses solaires par parsec au cube. Nous voyons que pour les galaxies les effets individuels sont négligeables : en effet nous avons $t_r \gg t_c$, de plus, l'âge des galaxies est plus petit que le temps de relaxation t_r .

	N	ρ $\frac{M_{\odot}}{(\text{pc})^3}$	t_c ans	t_r ans	Age ans
amas ouverts	10^2-10^3	1	10^7	$10^7-6.10^7$	10^7-10^8
amas de galaxies	10^2-10^3	10^{-4}	10^9	$10^9-6.10^9$	10^{10}
amas globulaires	10^5-10^7	10^2	10^6	$4.10^8-2.10^{10}$	10^{10}
galaxies	$10^{10}-10^{12}$	10^{-1}	3.10^7	$6.10^{14}-4.10^{16}$	10^{10}

Dans la suite de ce travail, nous négligerons les collisions entre étoiles pour ne considérer que les effets collectifs. Le système peut alors être considéré comme un fluide de l'espace des phases $(\vec{x}, \vec{v})$ caractérisé par sa fonction de distribution $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$. Cette fonction obéit à l'équation de BOLTZMANN sans collisions (encore appelée équation de VLASOV) :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} + \frac{\partial U}{\partial \vec{x}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0 \quad (1)$$

exprimant l'incompressibilité du fluide dans l'espace des phases.

Dans cette équation $U(\vec{x}, t)$ est le potentiel auto-cohérent donné par l'équation de POISSON :

$$\Delta U = -4\pi G m \rho(\vec{x}, t) \quad (2)$$

où $\rho(\vec{x}, t) = \int f(\vec{x}, \vec{v}, t) d^3\vec{v}$ est la densité du système.

On supposera que toutes les étoiles ont la même masse m . En fait, dans le modèle de VLASOV cette hypothèse n'est absolument pas nécessaire, il suffit qu'il n'y ait pas d'étoiles dont l'individualité serait trop différente des autres, c'est-à-dire dont la masse serait trop grande par rapport à la masse des autres étoiles. Mais pour des raisons de simplification, il est commode de prendre toutes les masses égales.

Plasma

On désigne par Plasma un système formé d'électrons et d'ions (nous ne nous intéressons qu'aux plasmas totalement ionisés). Nous supposons que les ions ont une masse infiniment plus grande que les électrons, les ions seront donc considérés comme immobiles et nous ne nous intéresserons qu'à la partie haute fréquence du spectre, c'est-à-dire aux oscillations d'électrons, en l'absence de tout champ électromagnétique extérieur. Pour des systèmes de température élevée et de densité faible, on peut séparer les effets collectifs et individuels, les constantes de temps t_c et t_r associées à ces 2 effets sont reliées par

$$\frac{t_r}{t_c} \sim \frac{1}{g \cdot |\text{Log} g|}$$

où g est un paramètre mesurant l'importance des effets individuels par rapport aux effets collectifs :

$$1/g = (K_B \cdot T \cdot \epsilon_0 / e^2)^{3/2} / \rho_0^{1/2}$$

(ρ_0 étant la densité moyenne des électrons de charge e , T est la température du plasma, K_B la constante de BOLZTMANN, ϵ_0 la permittivité du vide).

Le tableau suivant donne l'ordre de grandeur de g pour quelques plasmas :

	$\rho_0 \text{ (cm}^{-3}\text{)}$	$T \text{ (}^\circ\text{K)}$	g
Plasmas interstellaires	1	10^4	10^{-8}
Décharges gazeuses	10^{14}	10^4	10^{-1}
Plasmas thermonucléaires	10^{16}	10^8	10^{-6}

Généralement les effets individuels peuvent être négligés. Comme pour les systèmes stellaires, le plasma peut alors être caractérisé par sa fonction de distribution $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$ obéissant à l'équation de BOLTZMANN sans collisions encore appelée équation de VLASOV :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} + \frac{e}{m} \vec{E} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0$$

où $\vec{E}(\vec{x}, t)$ est le champ électrique créé par les particules :

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial \vec{x}} = \frac{e}{\epsilon_0} \{ \rho(\vec{x}, t) - \rho_i \}$$

$\rho(\vec{x}, t)$ est la densité d'électrons : $\rho(\vec{x}, t) = \int f(\vec{x}, \vec{v}, t) d^3\vec{v}$, ρ_i représente la densité des ions supposée uniforme.

Les 2 systèmes, stellaire et plasma, peuvent donc être assimilés à des fluides de l'espace des phases et leur fonction de distribution doit vérifier le système d'équations VLASOV - POISSON. Si l'on introduit le potentiel U que l'on définit par

$$-\frac{e}{m} \vec{E} = \frac{\partial U}{\partial \vec{x}} \quad \text{pour un plasma}$$

$$\text{et} \quad \vec{E} = \frac{\partial U}{\partial \vec{x}} \quad \text{pour un système stellaire, alors le système VLASOV}$$

POISSON s'écrit :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{V} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} + \frac{\partial U}{\partial \vec{x}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0$$

(équation valable pour un plasma et pour un système stellaire)

$$\text{et } \Delta U = -4\pi G m \rho(\vec{x}, t) \quad \text{en stellaire}$$

$$\Delta U = \frac{e^2}{\epsilon_0 m} \{ \rho(\vec{x}, t) - \rho_1 \} \quad \text{en plasma.}$$

La seule différence entre les deux systèmes considérés est le signe de la force agissant sur les particules (force attractive en stellaire, force répulsive en plasma). Pour les plasmas il faut ajouter un terme supplémentaire dans l'équation de POISSON dû à la présence des ions. Pour ces deux systèmes nous pouvons introduire les grandeurs caractéristiques suivantes :

- ω_p qui est la fréquence propre correspondant à des oscillations d'un plasma infini de densité constante ρ .

En stellaire, le système homogène infini est instable, le taux de croissance γ des instabilités est alors donné par la fréquence de JEANS $\omega_j = \gamma$.

Il faut remarquer que si pour un plasma un tel équilibre est réalisable grâce à la présence des ions, pour un système stellaire, par contre, il n'est pas possible d'annuler le champ moyen, sauf dans des cas particuliers de systèmes en rotation uniforme.

- λ_D qui est la longueur de DEBYE en plasma, (Cette quantité est la distance au delà de laquelle les corrélations entre particules deviennent négligeables). En stellaire la quantité correspondante est la longueur de JEANS notée λ_j

et l'on a

$$\lambda_D = \frac{V_T}{\omega_p}$$

$$\lambda_J = \frac{V_T}{\omega_J}$$

où V_T est la vitesse thermique des particules.

Avec les notations utilisées précédemment, ces quantités s'écrivent :

Stellaire	Plasma
$\omega_J^2 = 4\pi\rho Gm$	$\omega_p^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \frac{e^2}{m}$
$\lambda_J^2 = \frac{1}{4\pi} \frac{mV_T^2}{\rho Gm^2}$	$\lambda_D^2 = \epsilon_0 \frac{mV_T^2}{\rho e^2}$

Dans les systèmes stellaires λ_J donne l'ordre de grandeur des dimensions du système, ce n'est généralement pas le cas pour les plasmas où, du fait de la neutralité électrique globale, la dimension du plasma est indépendante de la longueur de DEBYE et ordinairement beaucoup plus grande qu'elle.

Par exemple, le plasma magnétosphérique spatial étant neutre, est de dimension très grande devant λ_D . Par contre pour les ondes stationnaires appelées ondes B. G. K. (BERNSTEIN et al /3/) et dans le cas de fortes non-linéarités les longueurs d'ondes possibles sont du même ordre de grandeur que λ_D . Dans le cas où tous les électrons sont piégés, (c'est le cas pratique réalisé en théorie des accélérateurs) où le piégeage est obtenu à l'aide d'un système focalisateur extérieur (nous verrons au chapitre IV que les ions peuvent jouer ce rôle focalisateur) alors λ_D donne l'ordre de grandeur du système.

Dans une première partie, nous rappellerons différents modèles utilisés en Dynamique Stellaire et en Plasma. En particulier, nous introduirons le modèle du Water-Bag que nous utiliserons dans la suite du travail.

Dans les deuxième et troisième parties nous étudierons la stabilité linéaire à symétrie sphérique et cylindrique.

Dans la quatrième partie, nous considérerons des systèmes unidimensionnels plans en Dynamique Stellaire et en Plasma avec une fonction de distribution du type double Water-Bag.

Pour les plasmas nous examinerons les conditions d'existence de solutions périodiques ou apériodiques. Une analyse en modes de la stabilité nous permettra d'établir une condition suffisante de stabilité pour ces systèmes.

CHAPITRE I

MODELES ET PROBLEMES POUR LES FLUIDES DE L'ESPACE DES PHASES

L'équation de VLASOV peut-être considérée de deux manières différentes :

+ Si on suppose le potentiel U donné (par exemple si on étudie l'évolution d'une population dans un champ extérieur fixé), cette équation est alors une équation linéaire aux dérivées partielles de la fonction f . La fonction de distribution s'exprime en fonction des invariants du mouvement. Le problème consiste dans ce cas à trouver les invariants du mouvement pour des particules évoluant dans un potentiel donné U .

+ Si on suppose que le potentiel U est donné par l'équation de Poisson le problème devient auto-cohérent et l'équation de VLASOV est une équation non linéaire. On peut alors classer ces problèmes en 3 grandes catégories :

a) l'étude des états stationnaires ; dans ce travail, aussi bien pour les plasmas que pour les systèmes stellaires nous ne occupons que des équilibres inhomogènes (exception faite du rappel des théories de LANDAU et de LYNDEN-BELL); pour les plasmas cependant, il existe aussi l'importante classe des équilibres homogènes dont l'étude de la stabilité a donné lieu à une vaste littérature (c'est toute la théorie des ondes et de la stabilité des plasmas homogènes, voir par exemple STIX /4/).

b) l'étude linéaire de la stabilité de ces états stationnaires pour des petites perturbations autour de l'équilibre.

c) l'étude de la stabilité non linéaire :

généralement les effets non linéaires sont peu importants, leur principal rôle est de limiter l'amplitude des ondes croissantes. Cependant, dans certains cas la théorie linéaire est inapplicable sur des temps assez longs et il faut avoir recours à la théorie non linéaire. (/5/, /6/, /7/.)

Dans ce travail, nous nous limiterons à l'étude de la stabilité linéaire des équilibres en Dynamique Stellaire et en Plasmas.

1) Etude des états stationnaires : Parmi les différents modèles d'équilibre utilisés en Dynamique Stellaire nous pouvons citer par exemple pour les systèmes à symétrie sphérique :

a) Le modèle partiellement thermalisé : ce modèle a été introduit par INFELD et SKORUPSKI /8/ il correspond à une fonction de MAXWELL tronquée :

$$\begin{aligned} F^{(0)} &= A e^{-\epsilon/\theta} && \text{pour } \epsilon \leq \epsilon_M \\ &= 0 && \text{pour } \epsilon > \epsilon_M \end{aligned} \quad (1)$$

où $\epsilon = V^2/2 - U^{(0)}(r)$ est l'énergie par unité de masse d'une étoile, ϵ_M et θ étant deux constantes.

Si on considère un système de dimension finie ayant une densité constante dans l'espace de configuration, on peut distinguer deux phases d'évolution : la première qui est la phase de mélange dynamique et la deuxième qui est dominée par les collisions.

Selon INFELD et SKORUPSKI, /8/, le modèle tronqué correspond à un système pour lequel la première phase vient de s'achever.

b) Les modèles polytropiques : Ces modèles ont été introduits par CAMM /9/, ils sont définis à l'équilibre par :

$$\begin{aligned} F^{(0)} &= A (\epsilon_M - \epsilon)^\mu && \text{pour } \epsilon \leq \epsilon_M \quad (\mu > 0) \\ &= 0 && \text{pour } \epsilon > \epsilon_M \end{aligned} \quad (2)$$

L'indice polytropique n est donné par $n = \mu + 3/2$

Ces modèles conduisent à une relation d'état valable uniquement à l'équilibre reliant la pression P et la densité :

$$P \propto (\rho^{(0)})^\gamma \quad \text{où } \gamma = 1 + 1/n \quad (3)$$

Cette relation d'état n'a évidemment plus de sens hors de l'équilibre.

Récemment, HENON /10/, a introduit les polytropes généralisés définis par :

$$\begin{aligned} F^{(0)} &= A (\epsilon_M - \epsilon)^\mu \cdot I^{2m} && \text{pour } \epsilon \leq \epsilon_M \\ &= 0 && \text{pour } \epsilon > \epsilon_M \end{aligned} \quad (4)$$

où I est le moment angulaire d'une étoile.

La fonction de distribution des vitesses est anisotrope et l'on a :

$$\langle T^2 \rangle / \langle R^2 \rangle = 2(m+1), \text{ où } \langle R^2 \rangle \text{ et } \langle T^2 \rangle$$

sont les vitesses quadratiques moyennes, radiale et tangentielle. .

Les modèles que nous venons de citer ne sont définis qu'à l'équilibre, ils ne permettent donc pas de décrire l'évolution du système au voisinage de cet équilibre. Cependant, il est possible de simuler numériquement l'évolution d'un système à partir d'un état d'équilibre donné et d'en déduire ainsi des résultats expérimentaux sur la stabilité de cet équilibre (HENON /10/)

c) Le modèle d'EINSTEIN /11/ : Ce modèle est défini à chaque instant, on suppose que les étoiles décrivent toutes des trajectoires circulaires autour d'un même centre de masse.

Pour un tel modèle la fonction de distribution à l'équilibre est :

$$F^{(0)} = A(r) \delta(T - V_0(r)) \delta(R) \quad (5)$$

où $A(r)$ et $V_0(r)$ sont deux fonctions dépendant de r .

MIKHAILOVSKI et al /12/ ont étudié la stabilité linéaire de ce système, ils ont montré qu'un tel équilibre est stable pour des perturbations radiales et non radiales.

En Plasma, le modèle équivalent est le modèle de plasma froid, /13/, il correspond à un système où tous les électrons ont la même vitesse, $u(x,t)$ (dans le cas d'un système unidimensionnel) au point x la fonction de distribution s'écrivant :

$$f(x,v,t) = \rho(x,t) \delta(v - u(x,t)) \quad (6)$$

d) Les modèles hydrodynamiques Considérons par exemple le cas d'un système stellaire tri-dimensionnel, on définit les moments d'ordre n par :

$$\langle V_i^n \rangle = \frac{1}{\rho} \int f V_i^n dV_1 dV_2 dV_3$$

où V_i , pour $i=1,2,3$ sont les composantes du vecteur vitesse $\vec{V}$.

L'équation de BOLTZMANN est équivalente à la suite infinie d'équations hydrodynamiques (dont nous n'écrivons ici que les 2 premières) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \langle V_i \rangle) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho \langle V_i \rangle) + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \langle V_i V_j \rangle) + \rho \frac{\partial U}{\partial x_i} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Le tenseur de pressions P_{ij} est défini par :

$$P_{ij} = \rho (\langle V_i V_j \rangle - \langle V_i \rangle \langle V_j \rangle) \quad (8)$$

Le système d'équations n'est pas fermé, l'équation qui détermine la pression fera intervenir le moment d'ordre 3 et ainsi de suite.

Pour résoudre le système, il est donc nécessaire d'ajouter une équation supplémentaire de manière à fermer le système.

Si on considère le cas d'un système à l'état stationnaire et dont on connaît la fonction de distribution, on peut rechercher une relation entre les différents moments.

C'est le cas en particulier du modèle polytropique, on retrouve alors l'isotropie du tenseur des pressions qui prend la forme :

$$P_{ij} = K(\rho^{(0)})^\gamma \delta_{ij}$$

Cette équation d'état n'étant valable qu'à l'équilibre et n'étant pas susceptible d'être généralisée hors de l'équilibre.

e) Le modèle du Water-Bag /14/ : D'après le théorème de LIOUVILLE, la fonction de distribution peut être considérée comme la densité d'un fluide incompressible de l'espace des phases. Dans le modèle du Water-Bag, nous considérons des états initiaux tels que la densité de ce fluide est constante et égale à A à l'intérieur d'un domaine D fermé de l'espace des phases. Au cours du temps cette densité reste constante et le domaine D se déforme.

D'autre part la masse du système doit rester constante, cette masse est représentée à chaque instant par le volume du domaine D. Par conséquent, au cours du temps le domaine D se déforme en conservant son volume initial. Le système est donc caractérisé par l'évolution de la frontière du domaine D. Chaque point de cette frontière évolue suivant la loi de la mécanique classique.

$$\begin{aligned}\vec{V} &= \frac{d\vec{x}}{dt} \\ \frac{d\vec{V}}{dt} &= \frac{dU}{d\vec{x}}\end{aligned}\tag{9}$$

Ce modèle peut se généraliser : nous pouvons considérer un ensemble de domaines D_i ($i = 1, \dots, N$) emboîtés les uns dans les autres :

$$D_1 \subset D_2 \subset D_3 \subset \dots \subset D_N$$

La propriété fondamentale du modèle Water-Bag est la persistance de cette relation au cours du temps, en effet d'après le théorème de LIOUVILLE deux trajectoires de l'espace des phases ne peuvent pas se couper, les frontières des domaines D_i ne peuvent donc pas avoir de points communs.

Nous attribuons à chaque domaine D_i une densité de phase constante A_i et si l'on désigne par S_i la surface (ou la courbe dans le cas unidimensionnel plan) du domaine D_i , la densité de phase F_i à l'intérieur de la surface S_i est égale à

$$\sum_{i=1}^N A_i$$

Plus généralement, F_i désignant la densité de phase dans l'espace compris entre les surfaces S_{i-1} et S_i on a

$$F_i = \sum_{j=i}^N A_j \text{ et } F_N = A_N$$

Sur les figures 1 et 2, nous avons représenté l'espace des phases dans le cas unidimensionnel plan et la fonction de distribution :

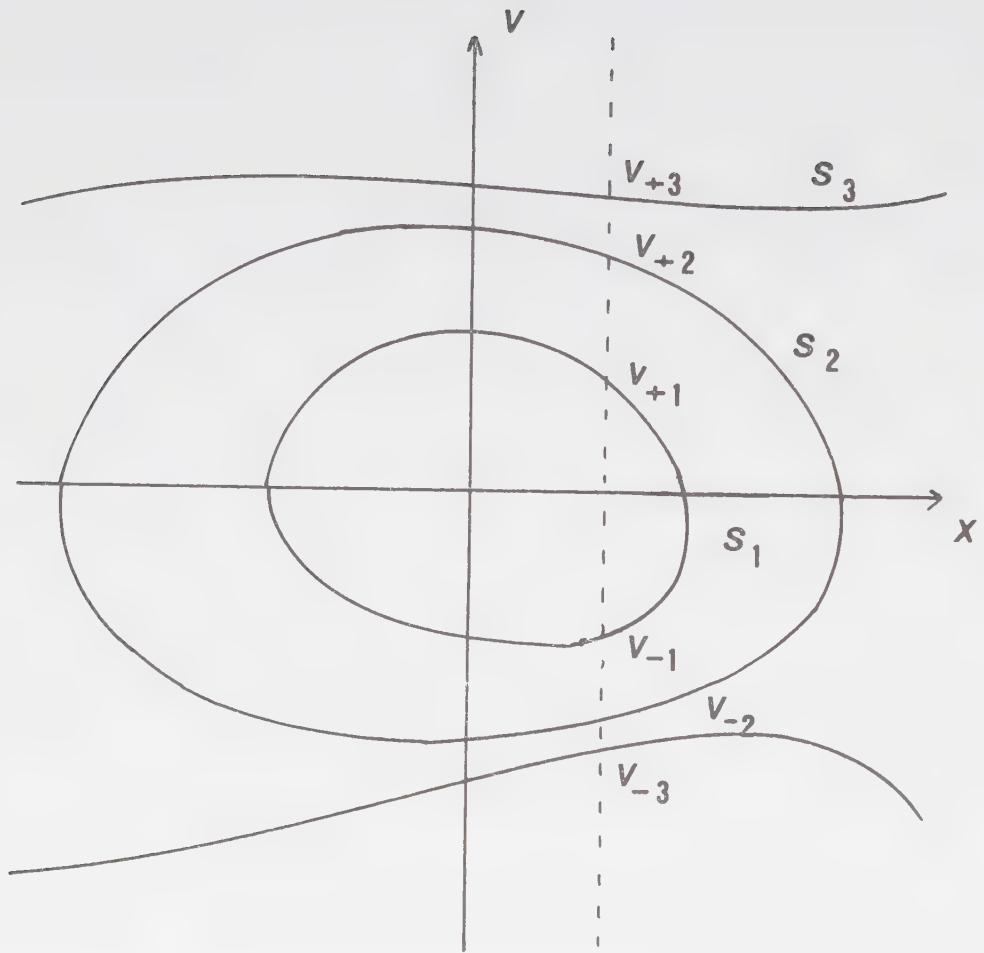


Figure 1 :

Espace des phases dans le cas unidimensionnel plan.

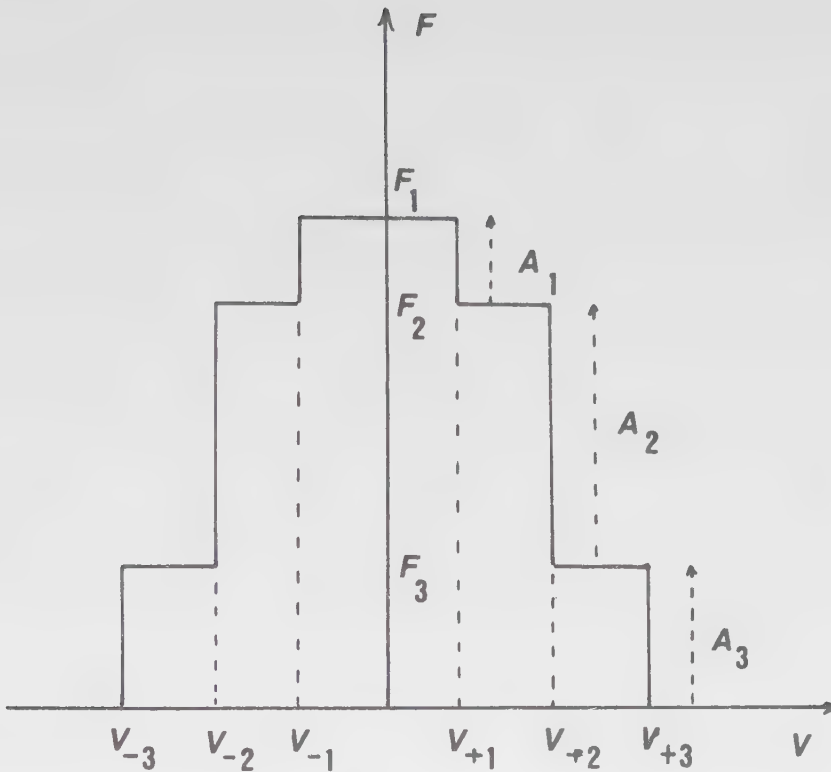


Figure 2 :

Fonction de distribution des vitesses en un point donné.

Bien entendu les F_i doivent tous être positifs tandis que les A_i , peuvent être positifs ou négatifs, ceci impose donc des contraintes sur les coefficients A_i :

Au cours du temps chaque domaine D_i se déforme en conservant son volume initial, chaque point de la frontière S_i évoluant suivant l'équation /9/. En augmentant le nombre de domaines N , on peut approcher d'aussi près que l'on veut toute fonction de distribution quelconque. Dans la suite de ce travail, nous utiliserons le modèle du "Water-Bag" simple, c'est-à-dire à un seul domaine et le modèle généralisé à N domaines que l'on désignera pour modèle du multiple "Water-Bag".

A l'état stationnaire le modèle du "Water-Bag" est équivalent au modèle de INFELD et SKORUPSKI /8/ lorsque la constante Θ devient infinie.

Il correspond également à un polytrophe sphérique :

$$\mu = 0 \quad (n = 3/2, \gamma = 5/3)$$

Pour les cas bidimensionnels et unidimensionnels on aurait

$$\gamma = 2 \text{ et } \gamma = 3$$

Il faut signaler une différence très importante entre les systèmes sphériques (tridimensionnels) et cylindriques (bidimensionnels) d'une part et les systèmes plans d'autre part. Pour les premiers, la relation d'état $P = K(\rho^{(0)})^\gamma$ est strictement valable pour le modèle "Water-Bag" à l'équilibre, elle est cependant susceptible d'une certaine généralisation.

Pour les systèmes plans cette relation est valable même en dehors de l'équilibre (BERTRAND, FEIX /15/). L'analogie avec le modèle hydrodynamique est évidemment purement formelle, elle est cependant très utile.

En physique des Plasmas, le modèle du "Water-Bag" a permis d'étudier des oscillations linéaires et non linéaires de grande longueur d'onde, c'est-à-dire dans des cas où les détails de la fonction de distribution n'interviennent pas mais où l'aspect non collisionnel est fondamental. (BERTRAND /16/.)

Avec un petit nombre de contours (2 ou 3) c'est-à-dire avec un petit nombre de paramètres, il est possible de rendre compte des phénomènes physiques intéressants. Par exemple, le double "Water-Bag" permet de représenter très simplement des fonctions de distribution ayant un minimum en $\epsilon = 0$.

Si ce minimum n'est pas pour $\epsilon = 0$, la représentation la plus simple s'obtient avec trois contours. (BERK et ROBERTS /17/).

Enfin si l'on veut étudier des phénomènes plus fins tel que l'amortissement de LANDAU, on peut le faire (au moins dans un certain sens) à l'aide du modèle multiple Water-Bag. (NAVET et BERTRAND, /18/).

Le modèle permet donc de plus nombreuses études dans le cas de géométries unidimensionnelles planes. Le passage à des géométries bi et tridimensionnelles est évidemment possible mais les études deviennent alors beaucoup plus compliquées. Cependant, on peut simplifier le problème en fixant certains degrés de liberté, c'est-à-dire en introduisant des symétries.

2) Théorie linéaire : L'équation de VLASOV est une équation non linéaire, ceci est dû à la présence du terme :

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{x}} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}$$

La théorie linéaire permet d'éliminer cette difficulté : on considère un état d'équilibre dont la fonction de distribution est $F^{(0)}$, le potentiel et le champ $U^{(0)}$, $E^{(0)}$, on étudie les perturbations autour de cet état d'équilibre en faisant des développements au premier ordre :

$$F = F^{(0)} + F^{(1)}, \quad U = U^{(0)} + U^{(1)}$$

$$E = E^{(0)} + E^{(1)}$$

Les problèmes qui se posent peuvent alors se classer en trois catégories :

a) Les problèmes de valeur initiale pour un équilibre homogène :

En physique des Plasmas, les systèmes homogènes tiennent une place considérable et peuvent être représentés à l'équilibre par une fonction de distribution ne dépendant que des vitesses : $F^{(0)} = F^{(0)}(v)$
avec de plus : $E^{(0)} = 0$

Le traitement de LANDAU /19/ consiste à utiliser la transformée de FOURIER sur l'espace et la transformée de LAPLACE sur le temps des perturbations

$$E^{(1)}(x, t) \text{ et } F^{(1)}(x, v, t)$$

La transformée de LAPLACE faisant intervenir les conditions initiales

$$E^{(1)}(x, t = 0) \text{ et } F^{(1)}(x, v, t = 0)$$

Le problème consiste alors à connaître la fonction diélectrique $\epsilon(k, \omega)$ caractérisant le Plasma (k est le nombre d'ondes et ω la pulsation). Cette fonction est donnée par

$$\epsilon(k, \omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{k} \int_{(C)} \frac{dF^{(0)}/dv}{\omega - kv} dv \quad (10)$$

où (C) est le contour de LANDAU qui inclut le pôle $v = \frac{\omega}{k}$

LYNDEN-BELL /20/ a été le premier à introduire cette méthode en Dynamique Stellaire. La première difficulté consiste à trouver un équilibre qui soit à la fois homogène, infini et auto-cohérent. Ceci n'est possible que dans quelques cas de systèmes en rotation uniforme. Par exemple pour un système à géométrie cylindrique en rotation uniforme Ω autour de l'axe zz' et tel que

$$\Delta U^{(0)} = -2\Omega^2$$

La densité spatiale est constante :

$$\rho^{(0)} = \frac{\Omega^2}{2\pi Gm} \quad (11)$$

La méthode employée par LANDAU peut alors s'appliquer avec succès. Pour ces systèmes, les perturbations se propageant suivant la direction de l'axe de rotation sont instables pour des longueurs d'ondes supérieures à une longueur critique (instabilité de JEANS). Pour les ondes stables se propageant dans cette direction (longueur d'onde inférieure à la longueur critique) on retrouve les phénomènes de l'amortissement de LANDAU. Dans les directions perpendiculaires à l'axe de rotation, les perturbations sont stables et il n'y a pas d'amortissement.

Pour les systèmes sphériques il est également possible de construire un équilibre homogène infini et auto-cohérent : c'est le modèle d'EINSTEIN cité précédemment dont MIKHAILOVS KII et al /12/ ont montré qu'il est stable.

Malheureusement presque tous les équilibres sont finis et fortement inhomogènes et un tel traitement ne peut s'appliquer.

b) L'analyse en modes : Dans cette méthode on suppose que les perturbations

$$F^{(1)}(\vec{x}, \vec{V}, t) \text{ et } E^{(1)}(\vec{x}, t)$$

sont de la forme

$$e^{i\omega t} F^{(1)}(\vec{x}, \vec{V}) \text{ et } e^{i\omega t} E^{(1)}(\vec{x})$$

La solution $E^{(1)}(\vec{x})$ apparaît alors sous la forme d'une équation intégrale, par exemple pour un système unidimensionnel plan cette équation s'écrit :

$$E^{(1)}(x) = \frac{1}{\omega} \int K(x, x', \omega) E^{(1)}(x') dx' \quad (12)$$

C'est une équation intégrale homogène et linéaire de FREDHOLM de deuxième espèce où le noyau : $K(x, x', \omega)$

dépend du paramètre ω

Le noyau présente généralement une forme compliquée et il est impossible d'obtenir une solution analytique. Cependant dans certains cas, il est possible d'introduire des approximations simplifiant l'équation intégrale.

Par exemple dans l'étude des structures spirales des galaxies LIN et al /21/ ont obtenu une équation de dispersion généralisée de la forme

$$D(\omega, k_{\omega}(r), r) = 0 \quad (13)$$

en supposant que la longueur d'onde radiale de l'onde spirale est petite (approximation WKB)

Dans le cas du modèle Water-Bag, cette équation intégrale se transforme en une équation aux valeurs propres. Plus généralement pour un multiple Water-Bag l'équation intégrale est équivalente à un système de N équations différentielles couplées (N étant le nombre de domaines de l'espace des phases). Nous sommes ainsi ramenés à un domaine plus connu, et permettant une manipulation plus aisée.

c) Méthode variationnelle : Dans certains problèmes une méthode variationnelle peut se substituer avantageusement à la méthode de l'équation intégrale. FOWLER /22/ a adapté la théorie de LYAPUNOV sur la stabilité des systèmes discrets au cas de fluides de l'espace des phases. La méthode consiste à rechercher des fonctions dites fonctions de LYAPUNOV dont l'existence entraîne la stabilité du système considéré.

Soit un vecteur $\psi(t)$ caractérisant la perturbation.

La fonctionnelle $V(\psi(t), t)$ sera une fonction de LYAPUNOV si elle satisfait les deux conditions.

$$1. \text{ Quelquesoit } \psi, V(\psi(t), t) \text{ est fini et } V(\psi(t), t) \geq \lambda \|\psi(t)\|$$

pour $t > 0$ (λ étant un scalaire positif)

$$2. \frac{d}{dt} V(\psi(t), t) \leq 0 \text{ pour tout } t > 0$$

on aura alors :

$$\|\psi(t)\| \leq \frac{V(\psi(t), t)}{\lambda} \leq \frac{V(\psi(0), 0)}{\lambda} \quad (14)$$

Pour l'étude de la stabilité linéaire autour d'un équilibre, nous supposons que $\Psi(0)$ est un infiniment petit et que $V(\Psi(0), 0)$ l'est également. Les inégalités (14) entraînent que $\Psi(t)$ reste un infiniment petit et que par conséquent le système est stable. Si le système est instable $\Psi(t)$ croît et devient une grandeur finie, l'inégalité précédente ne peut donc pas être vérifiée.

Dans le cas d'un fluide de l'espace des phases le vecteur $\Psi(t)$ caractérisant la perturbation vérifie une équation matricielle du type :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = M \cdot \Psi \quad (15)$$

où M est la matrice d'un opérateur linéaire (on se limite à l'étude des perturbations linéaires), généralement on choisit la norme scalaire :

$$|| \Psi(t) || = (\Psi(t), \Psi(t))^{1/2} ; \quad (\Psi_1(t), \Psi_2(t))$$

désigne le produit hermitien des vecteurs Ψ_1 et Ψ_2

La fonctionnelle $V(\Psi(t), t) = (\Psi, H_+ \Psi)$ sera une fonction de LYAPUNOV si l'opérateur H_+ est positif et défini et si l'on a :

$$\frac{d}{dt} (\Psi, H_+ \Psi) \leq 0 \quad (16)$$

Cette condition s'écrit encore $\left(\Psi, (H_+ M + M^+ H_+) \Psi \right) \leq 0$ où M^+ est la transposée conjuguée de M

Dans le cas où M est hermitien la condition $(\Psi, H_+ M \Psi) \leq 0$ entraîne la stabilité linéaire du système.

Cas particulier important : Un exemple d'application de la méthode de LYAPUNOV est le principe d'énergie utilisé en Dynamique Stellaire et en Plasmas. Considérons ces deux cas avec la fonction de distribution à l'équilibre :

$$F^{(0)} = F^{(0)}(\varepsilon)$$

On perturbe linéairement cet état d'équilibre, la nouvelle fonction de distribution étant $f = F^{(0)}(\epsilon) + F^{(1)}(\vec{x}, \vec{v}, t)$

et le champ : $\vec{E} = \vec{E}^{(0)}(\vec{x}) + \vec{E}^{(1)}(\vec{x}, t)$

L'énergie totale du système est donnée par

$$W = \frac{1}{2} m \int f v^2 d^3\vec{x} d^3\vec{v} + K \int E^2 d^3\vec{x} \quad (17)$$

où $K = \frac{1}{8\pi G}$ pour un système stellaire

$K = \frac{\epsilon_0}{2}$ pour un plasma

on en déduit la variation d'énergie totale due à la perturbation :

$$\Delta W = \frac{1}{2} \int F^{(1)} m v^2 d^3\vec{x} d^3\vec{v} + 2K \int \vec{E}^{(0)} \cdot \vec{E}^{(1)} d^3\vec{x} + K \int E^{(1)2} d^3\vec{x}$$

Soit en remarquant que

$$2K \int \vec{E}^{(0)} \cdot \vec{E}^{(1)} d^3\vec{x} = -m \int U^{(0)} F^{(1)} d^3\vec{x} d^3\vec{v}$$

on obtient

$$\Delta W = m \int \epsilon F^{(1)} d^3\vec{x} d^3\vec{v} + K \int E^{(1)2} d^3\vec{x} \quad (18)$$

D'après le théorème de LIOUVILLE, la fonction de distribution f est conservée le long d'une trajectoire de l'espace des phases, par conséquent pour toute fonction $J(f)$ nous avons

$$\int J(f) d^3\vec{x} d^3\vec{v} = \text{constante} \quad (19)$$

En remplaçant f par $F^{(0)} + F^{(1)}$ et en développant l'équation (19) au deuxième ordre, on a :

$$\int J' \left(F^{(0)} \right) F^{(1)} d^3x d^3v + \frac{1}{2} \int J'' \left(F^{(0)} \right) \left(F^{(1)} \right)^2 d^3x d^3v = 0$$

Si l'on choisit la fonction J telle que $J' \left(F^{(0)} \right) = \epsilon$ nous en déduisons : (LYNDEN-BELL /23/)

$$\int \epsilon F^{(1)} d^3x d^3v = \frac{1}{2} \int \frac{(F^{(1)})^2}{-dF^{(0)}/d\epsilon} d^3x d^3v \quad (20)$$

et la variation d'énergie totale s'écrit :

$$\Delta W = \frac{1}{2} \int \frac{(F^{(1)})^2}{-dF^{(0)}/d\epsilon} d^3x d^3v + K \int (E^{(1)})^2 d^3x \quad (21)$$

Cette quantité est constante, et l'on a :

$$\frac{d}{dt} \Delta W = 0 \quad (22)$$

Pour un plasma électrostatique ΔW se présente sous la forme d'une somme de deux termes positifs, il est donc évident que ΔW est positif. Nous pouvons choisir $(F^{(1)}, E^{(1)}) = \Psi$ le vecteur caractérisant la perturbation, le produit scalaire (Ψ_1, Ψ_2) est défini par :

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int \tilde{F}_1^{(1)} F_2^{(1)} d^3x d^3v + K \int \tilde{E}_1^{(1)} E_2^{(1)} d^3x \quad (23)$$

La fonction $\Delta W = (\Psi, H_+ \Psi)$

où H_+ est l'opérateur défini par la matrice

$$\begin{pmatrix} (-dF^{(0)}/d\varepsilon)^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est une fonction de LYAPUNOV si $dF^{(0)}/d\varepsilon < 0$

Par conséquent si cette dernière condition est vérifiée, le système est stable linéairement.

Malheureusement, pour les systèmes stellaires, ΔW se présente comme une différence de deux termes positifs (si $dF^{(0)}/d\varepsilon < 0$) et il n'est pas possible d'en déduire immédiatement la stabilité du système.

ANTONOV /24/ a établi une formule permettant de calculer les fréquences propres ω^2 d'un système stellaire. Nous reproduisons ici les principales étapes du calcul permettant l'établissement de cette relation.

Nous considérons donc une dépendance du temps de la forme $\frac{\partial f}{\partial t} = i\omega f$,

$$\text{soit l'opérateur } D \text{ défini par } D = \vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}} + \frac{\partial U^{(0)}}{\partial \vec{x}} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \quad (23)$$

l'expression $\frac{F^{(1)}}{dF^{(0)}/d\varepsilon} - U^{(1)}$ est telle que

$$D \left(\frac{F^{(1)}}{dF^{(0)}/d\varepsilon} - U^{(1)} \right) = \frac{DF^{(1)}}{dF^{(0)}/d\varepsilon} - DU^{(1)} \quad (24)$$

L'équation de VLASOV linéarisée qui s'écrit

$$\frac{\partial F^{(1)}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial F^{(1)}}{\partial \vec{x}} + \frac{\partial U^{(0)}}{\partial \vec{x}} \cdot \frac{\partial F^{(1)}}{\partial \vec{v}} + \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \vec{x}} \cdot \frac{\partial F^{(0)}}{\partial \vec{v}} = 0 \quad (25)$$

peut se mettre après division par $dF^{(0)}/d\varepsilon$ sous la forme

$$\frac{i\omega F^{(1)}}{dF^{(0)}/d\varepsilon} + D \left(\frac{F^{(1)}}{dF^{(0)}/d\varepsilon} - U^{(1)} \right) = 0 \quad (26)$$

Introduisant les parties symétriques et antisymétriques de $F^{(1)}$

$$\begin{aligned}\phi_s &= \frac{1}{2} \left(F^{(1)}(\vec{x}, \vec{v}, t) + F^{(1)}(\vec{x}, -\vec{v}, t) \right) \\ \phi_a &= \frac{1}{2} \left(F^{(1)}(\vec{x}, \vec{v}, t) - F^{(1)}(\vec{x}, -\vec{v}, t) \right)\end{aligned}\quad (27)$$

l'équation (26) se sépare en 2 :

$$\begin{aligned}i\omega\phi_s + D\phi_a &= 0 \\ \frac{i\omega\phi_a}{dF^{(0)}/d\epsilon} + D \left(\frac{\phi_s}{dF^{(0)}/d\epsilon} - U^{(1)} \right) &= 0\end{aligned}\quad (28)$$

Ecrivant le potentiel $U^{(1)}$ sous la forme :

$$\begin{aligned}U^{(1)} &= -mG \int \frac{F^{(1)}(\vec{x}', \vec{v}, t)}{|\vec{x}' - \vec{x}|} d^3\vec{x}' d^3\vec{v} \\ &= -mG \int \frac{\phi_s(\vec{x}', \vec{v}, t)}{|\vec{x}' - \vec{x}|} d^3\vec{x}' d^3\vec{v}\end{aligned}\quad (29)$$

nous avons le système

$$\begin{aligned}i\omega\phi_s + D\phi_a &= 0 \\ \frac{i\omega\phi_a}{dF^{(0)}/d\epsilon} + D \left\{ \frac{\phi_s}{dF^{(0)}/d\epsilon} + mG \int \frac{\phi_s}{|\vec{x}' - \vec{x}|} d^3\vec{x}' d^3\vec{v} \right\} &= 0\end{aligned}\quad (30)$$

En éliminant ϕ_s de ces deux équations il vient :

$$\frac{\omega^2\phi_a}{-dF^{(0)}/d\epsilon} = D \left\{ \frac{D\phi_a}{dF^{(0)}/d\epsilon} + mG \int \frac{D\phi_a}{|\vec{x}' - \vec{x}|} d^3\vec{x}' d^3\vec{v} \right\}\quad (31)$$

Finalement en multipliant l'équation (31) par $\hat{\phi}_a$ et en intégrant sur l'espace des configurations et sur l'espace des vitesses, nous obtenons :

$$\omega^2 \int \frac{|\phi_a|^2}{-dF^{(0)}/d\epsilon} d^3x d^3v = \int \frac{|D\phi_a|^2}{-dF^{(0)}/d\epsilon} d^3x d^3v \quad (32)$$

$$- mG \iint \frac{D\phi_a(\vec{x}, \vec{v}, t) D\hat{\phi}_a(\vec{x}', \vec{v}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x d^3v d^3x' d^3v'$$

Nous voyons que le second membre de cette équation représente deux fois la variation d'énergie totale qui serait due à la perturbation $D\phi_a$. Pour les systèmes tels que $dF^{(0)}/d\epsilon < 0$, nous voyons donc que le signe des ω^2 est le même que celui de ΔW . Par conséquent si la variation d'énergie totale est positive pour toutes les perturbations possibles du système alors les quantités ω^2 sont toutes réelles positives et le système est stable.

Récemment KULSRUD et MARK /25/ ont établi un principe d'énergie du même type que celui d'ANTONOV mais sans faire intervenir le concept de modes normaux.

D'autre part, la méthode d'étude de la stabilité par la recherche de fonctions de LYAPUNOV peut se comparer avec les méthodes thermodynamiques consistant à rechercher une entropie généralisée (FOWLER /22/). Signalons que MINARDI /26/ a établi un critère suffisant d'instabilité sur des bases thermodynamiques.

3) La simulation numérique :

Dans certains problèmes de plasmas les expériences sont difficilement réalisables. Pour les systèmes stellaires évidemment les "expériences" n'existent pas (dans le sens que l'on n'est pas maître des conditions initiales, des différents paramètres . Il faut noter cependant que l'observation directe existe et évidemment joue un rôle très important en Astronomie). Cependant les études théoriques étant complexes, elles nécessitent une vérification expérimentale. Récemment ce support expérimental a été fourni par les expériences numériques réalisées sur ordinateur.

On peut distinguer 2 types de méthodes : les méthodes lagrangiennes et les méthodes eulériennes. (Nous nous limiterons aux expériences numériques relatives à des systèmes non collisionnels.)

a) Méthodes lagrangiennes : Chaque particule obéit aux équations de la mécanique classique :

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{\text{grad}} U \text{ où } U \text{ est le potentiel auto-cohérent. La méthode lagrangienne con-}$$

siste à suivre simultanément l'évolution de toutes les particules au cours du temps.

Pour les systèmes que nous considérons, le nombre de particules est très élevé, il est évidemment impossible de suivre l'évolution de toutes ces particules. Ces systèmes seront alors représentés par un ensemble de N "superparticules", où N est beaucoup plus petit que le nombre de particules du système. Ceci exagère le facteur d'individualité g (défini dans l'introduction), il faut donc un minimum de superparticules. Pour un système tri-dimensionnel de dimension L, de densité ρ et de longueur caractéristique λ (longueur de DEBYE pour un plasma, longueur de JEANS pour un système stellaire, on a $g^{-1} = \rho\lambda^3$ et le nombre de particules qu'il faut traiter est :

$$N = \rho\lambda^3 \cdot \left(\frac{L}{\lambda}\right)^3$$

Pour un gaz d'étoiles nous avons $L \sim \lambda$ par conséquent

$\rho\lambda^3 \sim N$ et $g \sim 1/N$. Il n'est donc pas nécessaire de prendre N très grand pour obtenir un paramètre g caractérisant les effets individuels suffisamment petit.

Pour les plasmas, nous avons généralement $L \gg \lambda$ et nous devons donc avoir simultanément $(\rho\lambda^3)$ et (L/λ) grands. En conséquence le nombre

$$N = (\rho\lambda^3) \left(\frac{L}{\lambda}\right)^3 \text{ de superparticules à traiter sera plus grand qu'en dynamique}$$

stellaire.

Par contre pour les systèmes unidimensionnels $g^{-1} = \rho\lambda$ et $N = \rho\lambda \cdot \left(\frac{L}{\lambda}\right)$.

De plus les équations décrivant l'évolution d'une particule sont plus simples, dans le cas de la géométrie plane et le nombre de superparticules que l'on peut suivre est donc plus important, assurant ainsi un bon découplage entre les effets individuels et collectifs. Dans ce modèle les superparticules sont en réalité des plans chargés pouvant se déplacer suivant une direction perpendiculaire à leur surface et pouvant se croiser. (DAWSON /27/, HOHL /28/).

Pour les systèmes bi et tri-dimensionnels des hypothèses de symétrie permettent également de simplifier le problème. Par exemple pour des systèmes bidimensionnels à symétrie cylindrique HOCKNEY /29/ et HOHL /30/ ont étudié l'évolution de tiges infinies parallèles à l'axe du cylindre.

MILLER et PRENDERGAST /31/, HOHL et HOCKNEY /32/ ont réalisé des simulations de galaxies plates, à l'aide de modèles d'étoiles ponctuelles évoluant dans un plan (le mouvement perpendiculaire à ce plan étant ainsi artificiellement "gelé").

Pour les systèmes sphériques, CAMPBELL /33/, HENON /34/, BOUVIER et JANIN /35/ ont introduit le modèle des couches sphériques concentriques.

b) Méthodes euleriennes : Elles consistent à résoudre numériquement le système d'équations VLASOV-POISSON soit en suivant directement l'évolution de la fonction de distribution dans l'espace des phases, soit en utilisant des méthodes de transformation (la discrétisation ne se fera plus sur l'individualité des particules mais sur des "modes").

Les principales méthodes de transformation qui ont été réalisés actuellement sont

- + la double transformée de FOURIER (KNORR /36/, DENAVIT et KRUEER /37/. On utilise une double décomposition en série de FOURIER sur l'espace et sur les vitesses, (le système étant supposé périodique dans l'espace) la discrétisation de la variable conjuguée de x est automatique. Il reste à choisir convenablement l'intervalle de discrétisation de la variable conjuguée de v liée au pas sur le temps.

- + la transformée FOURIER-HERMITE, ARMSTRONG /38/ GRANT et FEIX /39/ : on utilise une décomposition en série de FOURIER sur l'espace et en polynômes d'HERMITE sur les vitesses. Si là encore le système est supposé périodique dans l'espace la discrétisation sur les variables conjuguées de x et v est automatique et l'avantage est que l'on a affaire à une double série.

Les deux méthodes ont été employées avec succès en physique des plasmas pour des systèmes plans unidimensionnels.

DENAVIT et KRUEER /37/ ont comparé des résolutions numériques effectuées par la méthode "FOURIER-FOURIER" et des simulations lagrangiennes pour des systèmes unidimensionnels périodiques, ils ont obtenu un bon accord quantitatif.

c) Utilisation du modèle "Water-Bag" : le modèle "Water-Bag" pour lequel la fonction de distribution est constante à l'intérieur d'un domaine de l'espace des phases est très bien adapté pour la simulation numérique.

Nous pouvons distinguer deux méthodes d'utilisation :

+ la méthode lagrange-eulérienne :

Pour connaître l'état du système à chaque instant il suffit de suivre l'évolution de la frontière du domaine. Pour cela la frontière est constituée par un certain nombre de points (le nombre dépend de la complexité de la frontière) dont on suit l'évolution par la méthode lagrangienne, BERK et ROBERTS /17/. Le mouvement de ces points obéit à la dynamique des particules mais ils ne sont considérés que comme des "markers" et on peut à volonté injecter de nouveaux "markers" si la complexité du contour devient trop grande. On peut également supprimer certains "markers" s'ils ne représentent qu'une portion négligeable de particules (voir BERK et ROBERTS /17/).

+ la méthode eulérienne : la méthode de la transformée de FOURIER peut encore être utilisée. Par exemple, pour des plasmas unidimensionnels, à condition que les fonctions $V_{\pm}(x,t)$ caractérisant la frontière du domaine restent des fonctions univoques en x ces derniers peuvent être décomposés en série de FOURIER ; permettant des études très fines (par exemple le calcul des déplacements de fréquence BERTRAND /16/). Ceci implique ordinairement des effets faiblement nonlinéaires.

CHAPITRE II

STABILITE DES SYSTEMES STELLAIRES A SYMETRIE SPHERIQUE

Dans ce chapitre, nous considérerons uniquement les systèmes stellaires à géométrie sphérique. Nous utiliserons donc les coordonnées sphériques r , θ , ϕ et les vitesses associées :

$$\begin{aligned} R &= \frac{dr}{dt} & \Phi &= r \frac{d\phi}{dt} \sin \theta \\ \Theta &= r \frac{d\theta}{dt} & T &= \sqrt{\Theta^2 + \Phi^2} \end{aligned}$$

Le système est caractérisé par sa fonction de distribution $f(r, R, T, t)$ vérifiant l'équation de BOLTZMANN sans collisions. Pour des systèmes à symétrie sphérique cette équation s'écrit (OGORODNIKOV /40/)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + R \frac{\partial f}{\partial r} + \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{T^2}{r} \right) \frac{\partial f}{\partial R} - \frac{RT}{r} \frac{\partial f}{\partial T} = 0 \quad (1)$$

et on a l'équation de POISSON

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) = -4\pi G \rho(r, t) = -4\pi G \int f 2\pi T dT dR \quad (2)$$

Dans ce chapitre on considérera que toutes les étoiles ont la même masse $m = 1$ et l'on choisira des unités telles que $4\pi G = 1$.

A l'état stationnaire $\partial/\partial t = 0$, la fonction de distribution peut s'écrire sous forme d'une fonction dépendant des invariants du mouvement.

Les invariants sont au nombre de 5, mais si l'on ne précise pas d'avantage la forme du potentiel, 2 invariants seulement sont connus : l'énergie ϵ et le moment angulaire I :

$$\epsilon = (R^2 + T^2)/2 - U^{(0)} \quad (3)$$

$$I = r \cdot T$$

$$\text{et à l'équilibre } f(r, R, T) = F^{(0)}(\epsilon, I) \quad (4)$$

Les premiers résultats sur la stabilité des systèmes dont la fonction de distribution à l'équilibre ne dépend que de ϵ ont été établis par ANTONOV (/41/ et /42/). En utilisant la méthode variationnelle, ANTONOV a montré que les polytropes d'indice $m \geq 3/2$ sont stables. D'autre part ANTONOV /41/ et LYNDEN-BELL et SANITT /23/ ont établi que les modes non sphériques sont stables si $dF^{(0)}/d\epsilon < 0$. FRIDMAN /43/, /44/ et MIKHAILOVSKI et al /12/ ont étudié la stabilité des systèmes sphériques pour lesquels toutes les étoiles décrivent des trajectoires circulaires autour d'un même centre de masse. Ils ont montré que ces systèmes sont stables pour des modes radiaux et non radiaux.

Actuellement les seuls résultats connus pour des systèmes sphériques tels que la condition $dF^{(0)}/d\epsilon < 0$ ne soit pas vérifiée ont été donnés par HENON /10/. Il a étudié numériquement la stabilité des polytropes généralisés ($F^{(0)} = A (\epsilon_0 - \epsilon)^n I^{2m}$ pour $\epsilon < \epsilon_0$, $F^{(0)} = 0$ pour $\epsilon > \epsilon_0$) pour $n \geq 1/2$ et $m \geq -.7$. Le cas $m = 0$ correspond aux polytropes ordinaires, il semble que dans ce cas la limite de stabilité (des modes radiaux) se situe au voisinage de $n = 1/2$.

Dans ce chapitre, nous rappellerons d'abord les résultats obtenus avec le modèle "Water-Bag" simple et avec le modèle généralisé dans le cas où seul le premier invariant ϵ intervient.

Puis nous étudierons la stabilité radiale des systèmes pour lesquels la fonction de distribution dépend des invariants ϵ et I .

A) CAS OU L'EQUILIBRE NE DEPEND QUE DU PREMIER INVARIANT

Dans ce cas le domaine D de l'espace des phases est limité par la surface d'équation $R^2 + T^2 - 2U^{(0)} = 2H$ où H est la valeur maximum prise par l'invariant ϵ (voir figure 3)

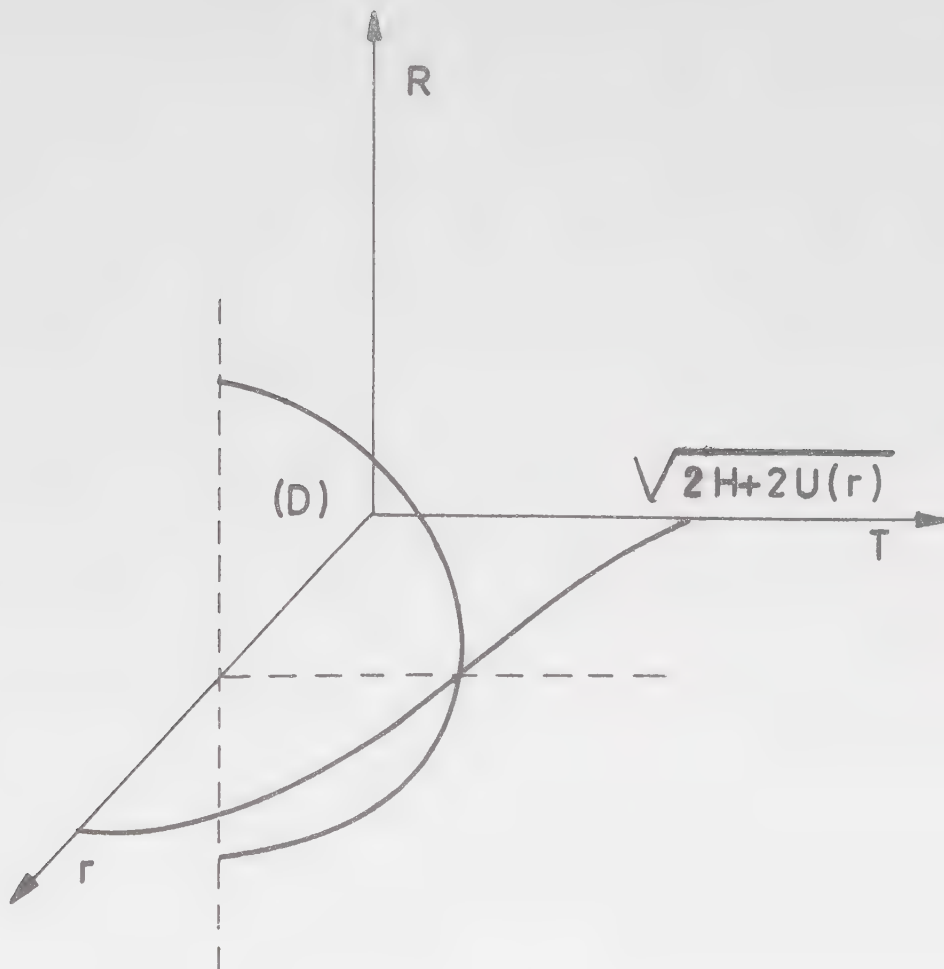


Figure 3 :

Domaine D dans l'espace des phases.

La densité est donnée par $\rho^{(0)}(r) = 4\pi A/3 (2H + 2U^{(0)})^{3/2}$

où A est la valeur constante de la fonction de distribution à l'intérieur du domaine $\mathcal{C}$

L'équation de POISSON qui s'écrit

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU^{(0)}}{dr} \right) = \frac{-4\pi A}{3} (2H + 2U^{(0)})^{3/2} \quad (5)$$

est une équation du type de EMDEN.

La propriété la plus intéressante du modèle "Water-Bag" est la propriété énergétique. Elle a été établie par HOHL /28/ pour les systèmes unidimensionnels plans et elle reste vraie pour les systèmes à symétrie sphérique. (DOREMUS et al /45/, /46/) En effet, nous avons montré qu'un multiple Water-Bag à N contours est une configuration à énergie minimum si toutes les densités de phase A_i sont positives.

De cette propriété nous pouvons en déduire deux conséquences :

+ si l'on considère à un instant initial un multiple Water-Bag, le système tendra vers un état d'équilibre. Mais cet état ayant une énergie minimale, le système présentera un excès d'énergie totale qui l'empêchera d'atteindre cet équilibre. Ceci a été mis en évidence par HOHL /28/ pour les systèmes plans et par BOUVIER et JANIN /35/ pour les systèmes sphériques.

Ces expériences montrent qu'une grande majorité d'étoiles ont des trajectoires correspondant à l'équilibre théorique et qu'une petite quantité d'étoiles ayant une grande énergie ont des trajectoires très excentriques.

La figure 4 représente l'évolution d'un "Water-Bag" unidimensionnel plan dans l'espace des phases (x, v) . Dans cette expérience numérique réalisée par HOHL /28/, à l'instant $t = 0$ la fonction de distribution est constante à l'intérieur d'un rectangle de l'espace des phases, la courbe en trait continu indique l'équilibre correspondant aux données initiales. Sur cette figure on voit que le système peut se décomposer en deux : un noyau correspondant à l'équilibre théorique et le halo aux étoiles de grande énergie.

Les figures {5 et 6} représentent des expériences numériques réalisées par BOUVIER et JANIN /35/ pour des systèmes sphériques. A l'instant initial la densité de phase est constante dans un domaine de l'espace des phases (r, U, L, I) .

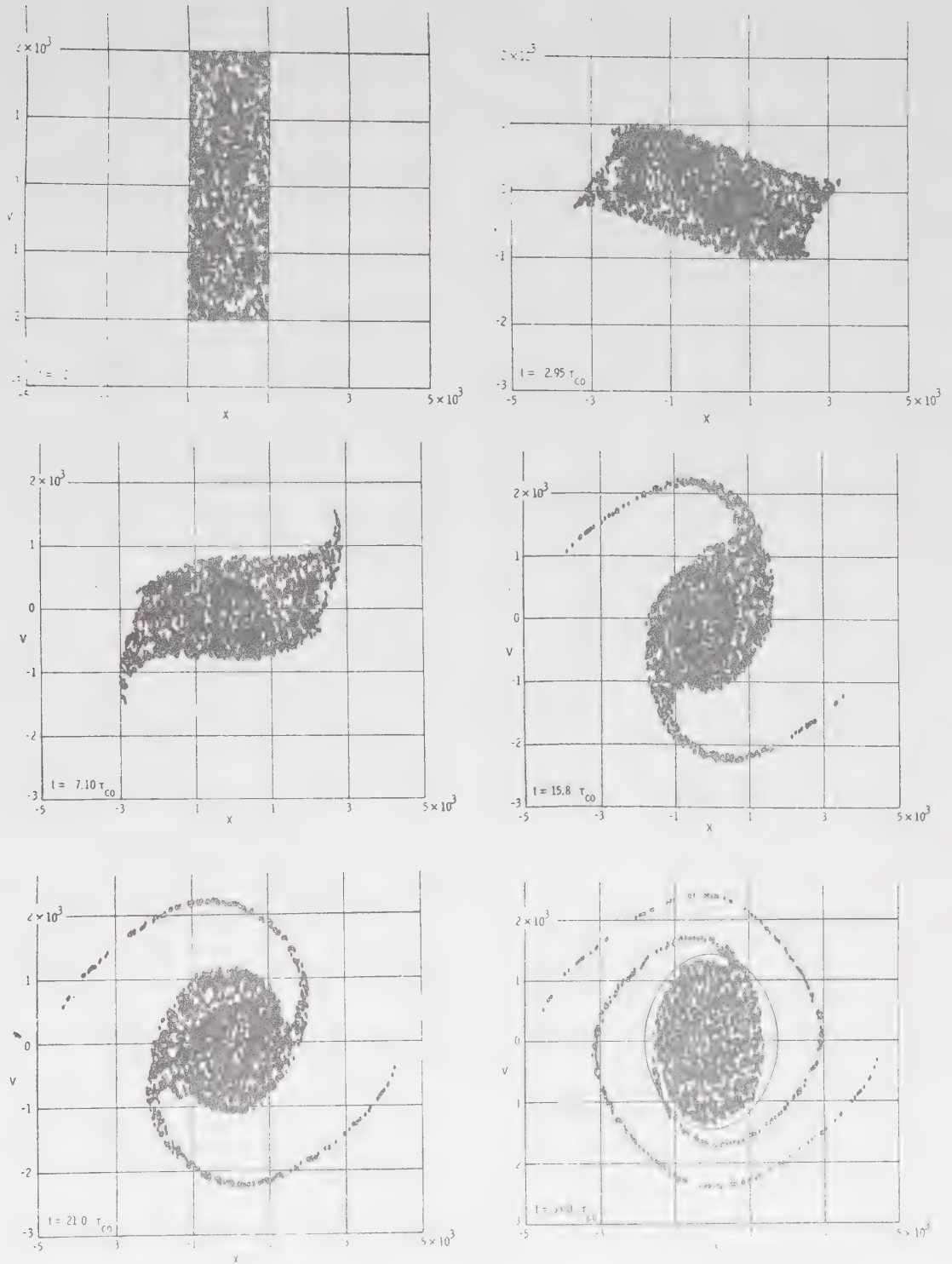


Figure 4 :

Evolution dans l'espace des phases d'un système de 22000 plans chargés, $\tau_{CO} = (4\pi G\rho)^{1/2}$.

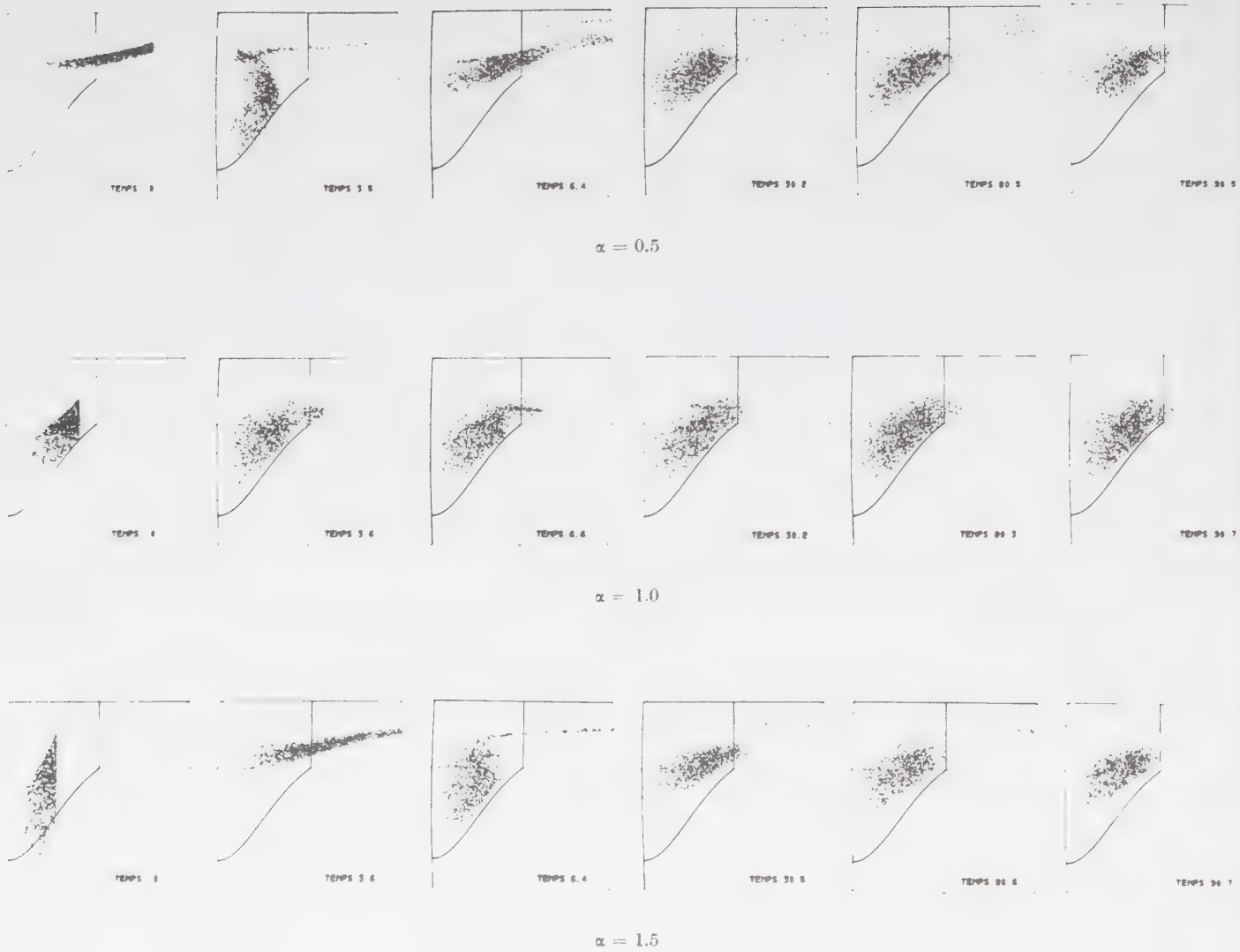
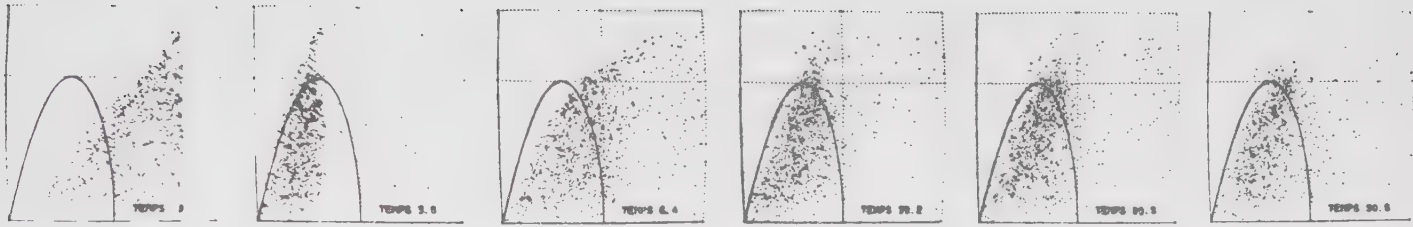
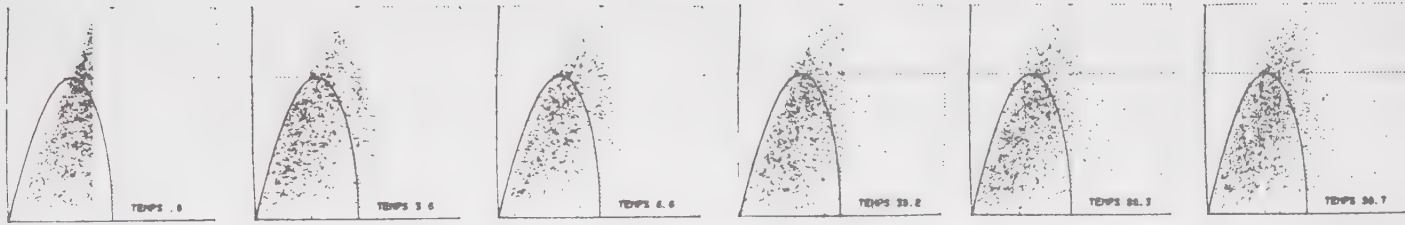


Figure 5 :

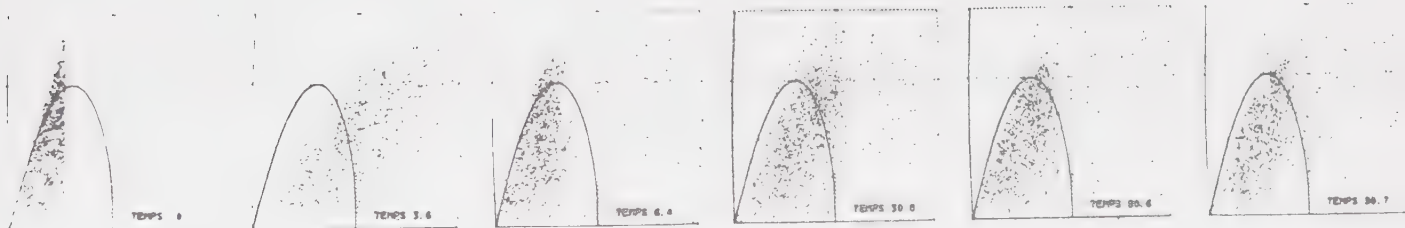
Evolution d'un système sphérique dans le plan (r, U) .



$\alpha = 0.5$



$\alpha = 1.0$



$\alpha = 1.5$

Figure 6 :

Evolution d'un système sphérique dans le plan (r, I) .

Ce domaine est le produit de 2 sphères, l'une dans l'espace de configuration l'autre dans l'espace des vitesses.

Le paramètre α représente le coefficient du viriel initial ; l'évolution est suivie dans les plans (r, U) et $(r, I = rT)$. De nouveau les étoiles peuvent se diviser en un noyau initial correspondant à l'équilibre et à un halo d'étoiles de grande énergie.

Il faut noter cependant que si l'état initial est trop différent de l'équilibre théorique, il n'y a plus de tendance vers l'équilibre théorique mais cassure du système en sous systèmes (HOHL /28/).

+ la deuxième conséquence est la stabilité du système (si tous les A_i sont positifs). En effet toute déviation de l'état d'équilibre entraînerait une augmentation de l'énergie totale du système ce qui est impossible, le système étant isolé et son énergie étant constante.

En faisant tendre le nombre N de contours vers l'infini nous pouvons approcher d'aussi près que l'on veut toute fonction de distribution $F^{(0)}(\epsilon)$; la condition $A_i > 0$ pour $i = 1, \dots, N$ étant équivalente à la condition $dF^{(0)}/d\epsilon < 0$. Nous en déduisons que les modes radiaux des systèmes à symétrie sphérique sont stables si $dF^{(0)}/d\epsilon < 0$. A cela nous pouvons ajouter la propriété de stabilité de ces systèmes pour les modes non radiaux (ANTONOV /41/) et en déduire la stabilité des systèmes sphériques à $dF^{(0)}/d\epsilon < 0$.

Dans le paragraphe suivant nous examinerons le cas où la fonction de distribution dépend des 2 invariants du mouvement ϵ et I .

B) CAS OU L'EQUILIBRE DEPEND DES 2 INVARIANTS ϵ ET I :

Dans ce paragraphe nous étudierons uniquement la stabilité des modes radiaux. Dans ce cas le moment angulaire $I = r T$ reste conservé au cours du temps.

Si l'on remplace les variables habituelles (r, R, T, t) par les nouvelles variables (r, R, I^2, t) la fonction de distribution devient :

$$f(r, R, T, t) = g(r, R, I^2, t)$$

et l'on a les relations suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial g}{\partial I^2} \frac{\partial I^2}{\partial r}$$

$$\frac{\partial f}{\partial R} = \frac{\partial g}{\partial R} + \frac{\partial g}{\partial I^2} \frac{\partial I^2}{\partial R}$$

$$\frac{\partial I^2}{\partial r} = 2rT^2 \quad (6)$$

$$\frac{\partial I^2}{\partial T} = 2r^2T$$

L'équation de VLASOV, pour un système à symétrie sphérique, s'écrit alors :

$$\frac{\partial g}{\partial t} + R \frac{\partial g}{\partial r} + \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{I^2}{r^3} \right) \frac{\partial g}{\partial R} = 0 \quad (7)$$

Nous voyons qu'avec l'introduction des nouvelles variables (r, R, I^2, t) l'équation (1) se simplifie et prend une forme identique à l'équation des systèmes plans :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + V \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial V} = 0 \quad (8)$$

L'élément d'intégration $2\pi T \, dT \, dR$ devenant $\pi/r^2 \, dR \, dI^2$ l'équation de POISSON s'écrit :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) = - \int g(r, R, I^2, t) \frac{\pi}{r^2} \, dR \, dI^2 \quad (9)$$

Dans la suite de ce travail nous allégerons l'écriture en notant $I^2 = J$.

Dans un premier temps nous allons montrer la stabilité radiale d'un Water-Bag anisotrope à un contour, dans un deuxième temps ce résultat sera généralisé au cas d'un Water-Bag à N contours.

1) Water-Bag à un contour : Pour définir le volume D de l'espace des phases (à l'intérieur duquel la densité de phase est égale à A) nous revenons aux variables usuelles (r, R, T) . Dans cet espace, D est limité par 2 surfaces

$B_+(r, T, t)$ (pour $R > 0$) et $B_-(r, T, t)$ (pour $R < 0$), ces deux surfaces doivent évidemment se raccorder pour $R = 0$. En fonction de nouvelles variables ces deux surfaces s'écrivent

$R_{\pm}(r, J, t) = B_{\pm}(r, T, t)$ (voir figure 7) et à l'instant t la fonction de distribution peut s'écrire :

$$g(r, R, J, t) = A \left[H\{R - R_{-}(r, J, t)\} - H\{R - R_{+}(r, J, t)\} \right] \quad (10)$$

où $H(x)$ est la fonction de HEAVISIDE valant 0 si $x < 0$, valant 1 si $x > 0$. Les équations d'évolution de la surface du domaine D s'obtiennent en reportant l'expression de $g(r, R, J, t)$ dans l'équation de VLASOV (équation (7) :

$$\frac{\partial R_{\pm}}{\partial t} + R_{\pm} \frac{\partial R_{\pm}}{\partial r} = \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{J}{r^3} \quad (11)$$

Le potentiel U étant donné par l'équation de POISSON :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) = -\rho(r, t) = -\frac{A\pi}{r^2} \int (R_{+} - R_{-}) dJ \quad (12)$$

La masse totale du système :

$$M = \int \rho(r, t) 4\pi r^2 dr$$

peut encore s'écrire :

$$M = 4\pi^2 \iint A (R_{+} - R_{-}) dr dJ \quad (13)$$

Nous pouvons décomposer M en une somme de masses partielles $M'(J)$, où $M'(J)$ représente la masse des étoiles ayant le même moment angulaire $(J)^{1/2}$. Etant donné que chaque étoile conserve son moment angulaire, les masses partielles $M'(J)$ restent toutes constantes au cours du temps :

$$M'(J) = 4\pi^2 A \int (R_{+} - R_{-}) dr \quad (14)$$

$$\text{soit:} \quad M'(J) = \int \frac{\pi A}{r^2} (R_{+} - R_{-}) 4\pi r^2 dr$$

Cette dernière expression montre que la quantité

$$v(r, J, t) = \frac{\pi A}{r^2} \{ R_{+}(r, J, t) - R_{-}(r, J, t) \} \quad (15)$$

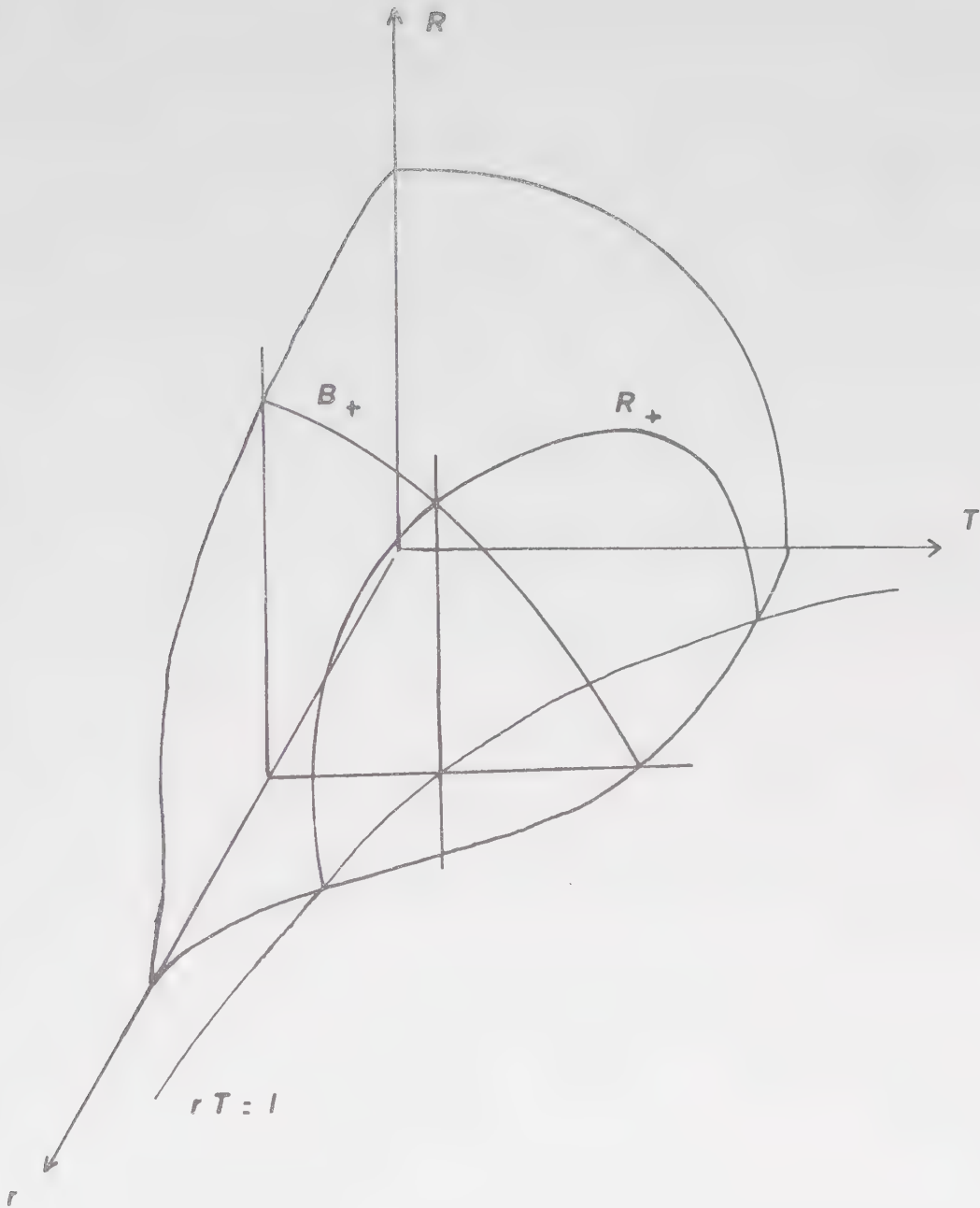


Figure 7 :

Intersections de la surface limitant le domaine D (nous n'avons représenté que la partie R positif) avec le plan $r = \text{constante}$ et la surface $rT = \text{constante}$.

peut être interprétée comme une densité partielle.

$v(r, J, t)$ représente la densité des étoiles ayant toutes le même moment angulaire $(J)^{1/2}$.

A cette densité **partielle**, nous associons le potentiel partiel $U'(r, J, t)$ défini par :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U'}{\partial r} \right) = -v(r, J, t) \quad (16)$$

le potentiel $U(r, t)$ étant obtenu par

$$U(r, t) = \int U'(r, J, t) dJ \quad (17)$$

a) Etat stationnaire : Avec $\partial/\partial t = 0$, l'équation déterminant les surfaces $R_{\pm}(r, J)$ devient

$$R_{\pm} \frac{\partial R_{\pm}}{\partial r} = \frac{dU^{(0)}}{dr} + \frac{J}{r^3}$$

La solution de cette équation peut s'écrire :

$$R_{\pm}(r, J) = \pm \left(2H + 2U^{(0)} - J/r^2 - f(J) \right)^{1/2} = \pm V(r, J) \quad (19)$$

où H est une constante et $f(J)$ une fonction caractérisant l'anisotropie de la distribution des vitesses.

La fonction de distribution à l'état stationnaire sera donc :

$$\begin{aligned} F^{(0)} &= A & \text{si : } (R^2 + T^2)/2 - U^{(0)} &\leq H - f(J)/2 \\ F^{(0)} &= 0 & \text{si : } (R^2 + T^2)/2 - U^{(0)} &> H - f(J)/2 \end{aligned} \quad (20)$$

Sur chaque surface $J = \text{constante}$ le domaine D de l'espace des phases est limité par les trajectoires d'étoiles évoluant à énergie ϵ_J constante :

$$\epsilon_J = H - f(J)/2 \quad (21)$$

Considérons par exemple le cas particulier d'une distribution isotrope des vitesses. Dans ce cas $f(J) = 0$ et $\epsilon_J = H$, H est la valeur maximum prise par l'invariant ϵ .

Si l'on considère cette fois le cas d'une distribution ellipsoïdale des vitesses, la fonction de distribution est donnée par :

$$\begin{aligned}
 F^{(0)} &= A & \text{si: } 1/2(R^2 + T^2 + 2\alpha r^2 T^2) - U^{(0)} &\leq H \\
 F^{(0)} &= 0 & \text{si: } 1/2(R^2 + T^2 + 2\alpha r^2 T^2) - U^{(0)} &> H
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

Dans ce cas nous avons $f(J) = 2\alpha J$ et $H = \epsilon_J + \alpha J$. Sur chaque surface $J = \text{constante}$ le domaine D est limité par les trajectoires à énergie $\epsilon_J = H - 2\alpha J$ constante. H est la valeur maximum prise par la combinaison linéaire des 2 invariants $\epsilon + 2\alpha J$.

Pour la suite de ce travail nous ne faisons aucune supposition sur $f(J)$ et nous considérons la fonction de distribution donnée par l'équation (20).

Nous désignons par $r_1(J)$ et $r_2(J)$ $\left[r_1(J) < r_2(J) \right]$ les 2 racines de l'équation $V(r, J) = 0$ pour J donné. En effet CONTOPOULOS /48/ et KURTH /49/ ont montré que l'équation

$$\frac{J}{r^2} - 2U^{(0)}(r) - 2\epsilon = 0$$

admet au plus deux racines.

La densité partielle $v^{(0)}(r, J)$ est donnée par

$$v^{(0)}(r, J) = \frac{2A\pi}{r^2} V(r, J)$$

et la densité totale par

$$\rho^{(0)}(r) = \int v^{(0)}(r, J) dJ \tag{23}$$

b) Théorie linéarisée autour de l'équilibre :

Pour étudier la stabilité de cet équilibre nous appliquons une petite perturbation radiale sur cet équilibre. Les surfaces limitant le domaine D deviennent :

$$R_{\pm}(r, J, t) = \pm V(r, J) + R_{\pm}^{(1)}(r, J, t) \tag{24}$$

Dans les calculs nous nous limiterons aux termes du premier ordre.
Les équations d'évolution des surfaces limitant D deviennent :

$$\frac{\partial R_{\pm}^{(1)}}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial r} (V R_{\pm}^{(1)}) = \frac{\partial U^{(1)}}{\partial r} \quad (25)$$

où $U^{(1)}$ est le potentiel perturbé, de même $U'^{(1)}$ étant le potentiel partiel perturbé, nous avons :

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial U'^{(1)}}{\partial r}) = -r^2 v^{(1)} = -A\pi(R_+^{(1)} - R_-^{(1)}) \quad (26)$$

Il est intéressant d'introduire les champs gravitationnels partiels et le champ total :

$$E'(r, J, t) = \frac{\partial U'(r, J, t)}{\partial r} \quad (27)$$

$$E(r, t) = \frac{\partial U(r, t)}{\partial r} = \int E'(r, J, t) dJ$$

Le champ partiel perturbé $E'^{(1)}(r, J, t)$ est obtenu à partir de l'équation (26) qui devient

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 E'^{(1)}) = -A\pi(R_+^{(1)} - R_-^{(1)}) \quad (28)$$

En intégrant cette équation par rapport à r on a :

$$\left(r^2 E'^{(1)} \right)_{r_1}^{r_2} = -A\pi \int (R_+^{(1)} - R_-^{(1)}) dr \quad (28)$$

$$= - \int_{r_1}^{r_2} v^{(1)}(r, J, t) r^2 dr \quad (29)$$

Le membre de droite de l'équation (29) représente la variation de masse des étoiles de moment angulaire I . Les perturbations étant radiales, le moment angulaire est conservé et cette quantité est nulle, on a donc :

$$r_1^2 E',^{(1)}(r_1, J) = r_2^2 E',^{(1)}(r_2, J).$$

La quantité $E',^{(1)}(r_2, J)$ est nulle car le champ reste constant en dehors d'un système isolé à symétrie sphérique.

Nous avons donc :

$$E',^{(1)}(r, J) = 0 \text{ pour } r = r_1(J) \text{ et } r = r_2(J).$$

On suppose une dépendance du temps en $e^{i\omega t}$
Les 2 équations (25) se combinent pour donner

$$i\omega(R_+^{(1)} - R_-^{(1)}) + \frac{\partial}{\partial r}(V(R_+^{(1)} - R_-^{(1)})) = 0 \quad (30)$$

En éliminant $(R_+^{(1)} - R_-^{(1)})$ entre les 2 équations (28) et (30) puis en intégrant par rapport à r on obtient :

$$i\omega r^2 E',^{(1)} = A\pi V(R_+^{(1)} + R_-^{(1)}) \quad (31)$$

En additionnant les 2 équations (25) et en multipliant le résultat par V on a :

$$i\omega V(R_+^{(1)} + R_-^{(1)}) + V \frac{\partial}{\partial r}(V(R_+^{(1)} - R_-^{(1)})) = 2VE',^{(1)} \quad (32)$$

Finalement, on reporte l'expression de $r^2 E',^{(1)}$ déduite de l'équation (31) dans (32)

$$\omega^2 r^2 E',^{(1)} = -V^{(0)} r^2 E'^{(1)} - V \frac{\partial}{\partial r} \left\{ V \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E',^{(1)}) \right\} \quad (33)$$

$$\text{avec :} \quad E'^{(1)} = \int E',^{(1)}(r, J) dJ \quad (34)$$

Nous obtenons un système infini d'équations couplées entre elles par la relation (34).

Ce système d'équations obtenu pour un modèle Water-Bag simple, dans le cas sphérique est à comparer avec le système d'équations (26) obtenu pour un multiple Water-Bag dans le cas plan (chapitre IV). Dans les 2 cas nous avons une décomposition en champs partiels, le couplage s'effectuant par l'intermédiaire du champ total.

c) Etude de la stabilité : En multipliant l'équation (33) par $\frac{\gamma_{E', (1)}}{v^{(0)}}$ et en intégrant sur r et J nous obtenons :

$$\omega^- \iint \frac{r^2 |E', (1)|^2}{v^{(0)}} dr dJ = - \int r^2 |E', (1)|^2 dr + \frac{1}{2A\pi} \iint v \left| \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E', (1)) \right|^2 dr dJ \quad (35)$$

Sur cette équation nous voyons que ω^2 est nécessairement réel. Pour montrer que le système considéré est stable, il suffit donc de montrer que la quantité Q définie par

$$Q = - \int r^2 |E', (1)|^2 dr - \frac{1}{2A\pi} \int \frac{\gamma_{E', (1)}}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(v \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E', (1)) \right) dr dJ \quad (36)$$

est toujours positive. Dans ce but, nous introduisons les fonctions

$$N' (r, J) = v^{(0)} (r, J) r^3$$

$$\text{et } N (r) = \int v^{(0)} (r, J) dJ$$

(37)

cette dernière équation s'écrit encore

$$N(r) = r^3 \int v^{(0)} (r, J) dJ = r^3 \rho^{(0)} (r) \quad (38)$$

Les fonctions N' et N sont reliées par l'équation différentielle :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(V \frac{\partial N'}{\partial r} \right) + \frac{2A\pi}{r^2} N = 2A\pi \frac{dU^{(0)}}{dr} \quad (39)$$

Nous avons en effet :

$$\begin{aligned} V \frac{\partial N'}{\partial r} &= V \frac{\partial}{\partial r} (2A\pi V r) \\ &= 2A\pi V^2 + 2A\pi r V \frac{\partial V}{\partial r} \end{aligned}$$

En tenant compte de l'équation (18) nous avons

$$V \frac{\partial N'}{\partial r} = 2A\pi V^2 + 2A\pi r \left(\frac{dV^{(0)}}{dr} + \frac{J}{r^3} \right)$$

En dérivant par rapport à r il vient :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(V \frac{\partial N'}{\partial r} \right) = 2A\pi \left(\frac{r d^2V^{(0)}}{dr^2} + \frac{3 dV^{(0)}}{dr} \right)$$

Finalement en utilisant l'équation de POISSON, nous retrouvons l'équation (39).

Les fonctions $N'(r, J)$ sont nulles pour $r = r_1(J)$ et $r = r_2(J)$, et restent positives à l'intérieur de cet intervalle. Nous pouvons donc écrire toute perturbation $r^2 E^{(1)}$ sous la forme

$$r^2 E^{(1)} = \alpha(r, J) N'(r, J) \quad (40)$$

où $\alpha(r, J)$ est une fonction quelconque ne présentant pas de discontinuités. Nous introduisons l'équation (40) dans le calcul de Q ; pour cela nous commençons par évaluer le dernier terme de l'équation (36) :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(V \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E^{(1)}) \right) = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial r^2} V N' + \frac{\partial \alpha}{\partial r} \left(\frac{\partial V}{\partial r} N' + 2V \frac{\partial N'}{\partial r} \right) + \alpha \frac{\partial}{\partial r} \left(V \frac{\partial N'}{\partial r} \right) \quad (41)$$

Nous remplaçons le dernier terme de (41) par son expression déduite de (39), la quantité peut s'écrire sous la forme d'une somme de 4 intégrales :

$$I_1 = - \int \frac{1}{r^2} \left| \int \alpha(r, J) N'(r, J) dJ \right|^2 dr \quad (42a)$$

$$I_2 = \int \left(\frac{-dU^{(0)}}{dr} \right) \int |\alpha|^2 N' dJ dr \quad (42b)$$

$$I_3 = \int \frac{N(r)}{r^2} \int |\alpha|^2 N' dJ dr \quad (42c)$$

$$I_4 = \frac{-1}{2A\pi} \iint \alpha N' \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial r^2} V N' + \frac{\partial \alpha}{\partial r} \frac{\partial V}{\partial r} N' + \frac{2\partial \alpha}{\partial r} \frac{\partial N'}{\partial r} V \right) dr dJ \quad (42d)$$

$$\text{avec } Q = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

En intégrant par parties le premier terme de (42d), et en combinant avec les 2 termes suivants, l'intégrale I_4 se simplifie :

$$I_4 = \frac{1}{2A\pi} \iint \left| \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right|^2 N'^2 V dr dJ \quad (43)$$

Les intégrales I_2 , I_4 sont positives, il nous reste à étudier le signe de $I_1 + I_3$.

D'après l'inégalité de SCHWARZ nous avons :

$$\int N' dJ \int |\alpha|^2 N' dJ \geq \left| \int \alpha N' dJ \right|^2$$

$$\text{et } I_1 + I_3 = \int \frac{1}{r^2} \left\{ N(r) \int |\alpha|^2 N' dJ - \left| \int \alpha N' dJ \right|^2 \right\} dr \geq 0 \quad (44)$$

Ce qui entraîne $Q \geq 0$. De plus nous remarquons que I_2 est toujours strictement positif, en effet, il ne peut être nul que si α est nul.

De ceci nous déduisons que les quantités ω^2 sont toutes strictement positives, il n'y a donc pas de mode marginal $\omega = 0$. Quelle que soit la fonction de distribution des vitesses, les modes radiaux sont stables pour le modèle Water-Bag simple.

2) Multiple Water-Bag : Dans ce paragraphe nous nous proposons de généraliser le résultat obtenu pour le modèle Water-Bag à un contour au cas d'une fonction de distribution $F^{(0)}(\epsilon, J)$ et ceci à l'aide du modèle du multiple Water-Bag. Il faut noter que le calcul que nous présentons reprend les mêmes étapes que précédemment, nous n'avons séparé ce paragraphe du précédent que pour rendre plus claire la double composition sur les moments angulaires et sur la fonction de distribution.

Considérons d'abord une fonction de distribution $f(r, R, T, t)$. Dans l'espace des phases (r, R, T) nous traçons N surfaces $f(r, R, T, t) = \text{constante}$, et nous supposons qu'entre ces surfaces la fonction de distribution f reste constante. Nous numérotions les "bags" de 1 à N en commençant par celui qui se trouve le plus à l'intérieur et en nous dirigeant vers l'extérieur. Le premier bag a une densité de phase A_1 et est limité par les surfaces $B_{+,1}(r, T, t)$ (pour $R \geq 0$) et $B_{-,1}(r, T, t)$ (pour $R \leq 0$); le $i^{\text{ème}}$ "bag" a une densité de phase A_i et est limité par les surfaces $B_{+,i}$, $B_{-,i}$. Le multiple Water-Bag est obtenu en faisant la somme des N bags. A l'intérieur de la première région limitée par $B_{+,1}$, $B_{-,1}$ la densité de phase est donc

$\sum_{i=1}^N A_i$, à l'intérieur de la $i^{\text{ème}}$ région située entre les $i^{\text{èmes}}$ et $(i-1)^{\text{èmes}}$

surfaces la densité de phase vaut : $\sum_{j=i}^N A_j$ (voir figure 8).

En faisant tendre N vers l'infini on peut approcher d'autant plus près que l'on veut toute fonction $f(r, R, T, t)$ quelconque, toute fonction de distribution peut donc être représentée par un multiple Water-Bag.

Comme précédemment nous utilisons les variables $(r, J = r^2 T^2, t)$, les surfaces des domaines D_i sont alors représentées par les fonctions

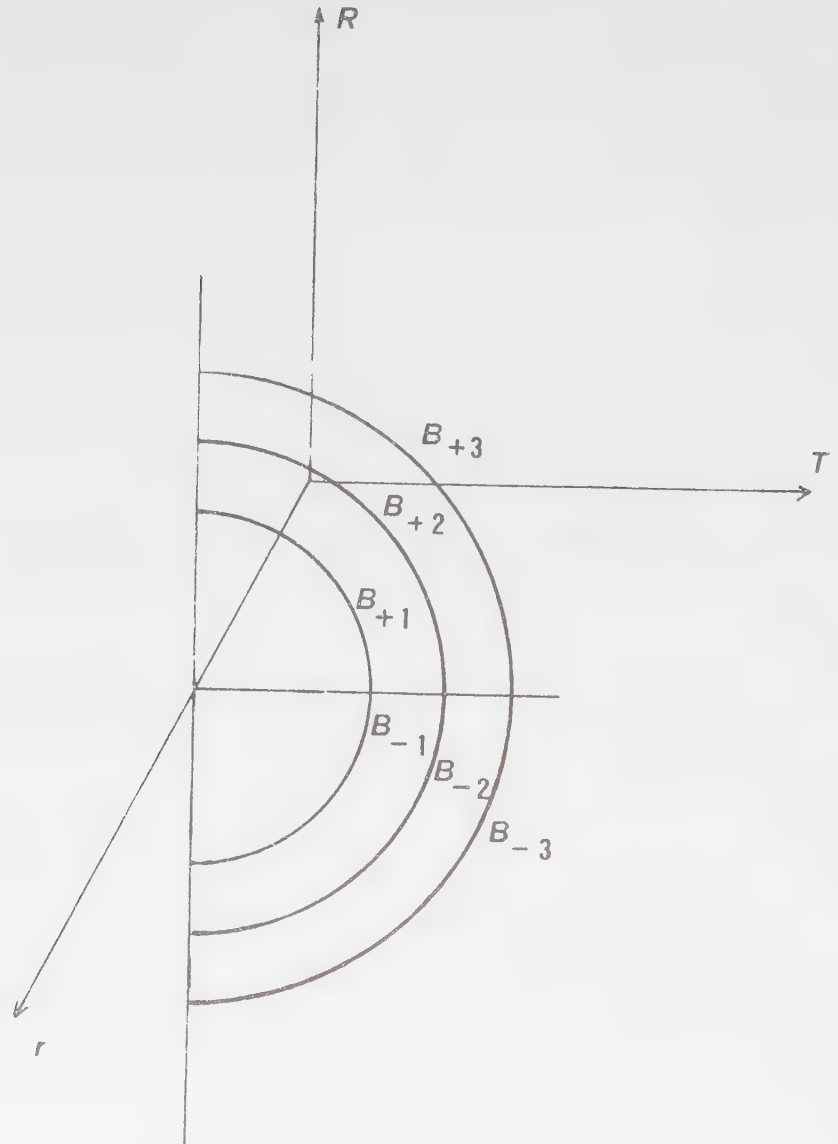


Figure 8:

Intersections des surfaces $B_{\pm, i}$ avec le plan $r=\text{constante}$.

$$R_{\pm,i}(r,J,t) = B_{\pm,i}(r,T,t)$$

qui vérifient les équations :

$$\frac{\partial R_{\pm,i}}{\partial t} + R_{\pm,i} \frac{\partial R_{\pm,i}}{\partial r} = \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{J}{r^2} \quad (45)$$

La densité totale $\rho(r,t)$ du système s'obtient par l'équation :

$$\rho(r,t) = \sum_i \int A_i \frac{\pi}{r^2} (R_{+,i} - R_{-,i}) dJ \quad (46)$$

Cette densité peut être décomposée en une somme de densités partielles $\rho_i(r,t)$ représentant les densités des étoiles à l'intérieur des "bags" :

$$\rho_i(r,t) = \frac{A_i \pi}{r^2} \int (R_{+,i} - R_{-,i}) dJ \quad (47)$$

$$\text{et } \rho(r,t) = \sum_{i=1}^N \rho_i(r,t)$$

La masse des étoiles M du système est la somme des masses M_i des particules dans chaque "bag"

$$M = \sum_{i=1}^N M_i \quad (48)$$

Le nombre d'étoiles ayant la densité de phase A_i restant constant, il en sera de même des masses partielles M_i .

Comme précédemment nous pouvons décomposer M_i en une somme de masses partielles $M'_i(J)$ où $M'_i(J)$ représente la masse des étoiles de moment angulaire $J^{1/2}$ à l'intérieur du $i^{\text{ème}}$ "bag" on a :

$$M_i = \int M'_i(J) dJ = \int \rho_i(r,t) 4\pi r^2 dr \quad (49)$$

$$\text{et } M'_i(J) = A_i \pi \int \frac{1}{r^2} (R_{+,i} - R_{-,i}) 4\pi r^2 dr$$

Nous considérons donc que

$$v_i(r, J, t) = \frac{A_i \pi}{r^2} (R_{+, i} - R_{-, i}) \quad (51)$$

représente une densité partielle à laquelle nous associons le potentiel partiel $U'_i(r, J, t)$ créé par les étoiles du "bag" i de moment angulaire $(J)^{1/2}$:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial U'_i}{\partial r}) = - \frac{A_i \pi}{r^2} (R_{+, i} - R_{-, i}) \quad (52)$$

Cette équation correspond à l'équation (16) du premierement

$$\text{Nous avons : } U_i(r, t) = \int U'_i(r, J, t) dJ$$

qui représente le potentiel partiel créé par le $i^{\text{ème}}$ "bag", le potentiel total s'obtenant par :

$$U(r, t) = \sum_{i=1}^N U_i(r, t) \quad (53)$$

A ces potentiels, nous associons les champs gravitationnels correspondants :

$$E = \frac{\partial U}{\partial r}, \quad E_i = \frac{\partial U_i}{\partial r}, \quad E'_i = \frac{\partial U'_i}{\partial r} \quad (54)$$

a) Etude de l'état stationnaire : A l'équilibre $\partial/\partial t = 0$, les équations des surfaces des domaines D_i se simplifient :

$$R_{\pm, i} \frac{\partial R_{\pm, i}}{\partial r} = \frac{dU^{(0)}}{dr} + \frac{J}{r^3} \quad (55)$$

et après intégration nous obtenons

$$R_{\pm, i}(r, J) = \pm V_i(r, J) = \pm \left(2H_i + 2U^{(0)} - J/r^2 - f_i(J) \right)^{1/2} \quad (56)$$

Les fonctions $f_i(J)$ caractérisent l'anisotropie des vitesses et les H_i sont des constantes.

Sur chaque surface $J = \text{constante}$, le domaine D_i est limité par les trajectoires d'étoiles à énergie ϵ_i constante :

$$\epsilon_i = \frac{1}{2} (R^2 + T^2) - U^{(0)} = H_i - \frac{1}{2} f_i(J) \quad (57)$$

Considérons par exemple le cas d'une distribution isotrope des vitesses, alors $f_i(J) = 0$ et $H_i = \epsilon_i$.

Pour une distribution ellipsoïdale des vitesses

$$f_i(J) = 2\alpha J \text{ et } \epsilon_i = H_i - \alpha J$$

Dans la suite de cette étude, nous nous limiterons à des densités partielles A_i , toutes positives. Si l'on se place sur une surface $J = \text{constante}$, il est facile de voir que la condition $A_i > 0$, $\forall i$ correspond à l'hypothèse $(\partial F^{(0)} / \partial \epsilon) < 0$

De même que pour le cas d'un modèle à un contour, les fonctions $V_i(r, J)$ ont 2 racines $r_{1i}(J)$ et $r_{2i}(J)$ (on suppose $r_{1i}(J) < r_{2i}(J)$.)

b) Equations linéarisées autour de l'équilibre : Considérons des perturbations linéaires et radiales. Pour chaque surface nous avons :

$$R_{\pm i}(r, J, t) = \pm V_i(r, J) + R_{\pm i}^{(1)}(r, J, t) \quad (58)$$

Les équations d'évolution de ces surfaces deviennent en se limitant aux termes du 1^{er} ordre :

$$\frac{\partial R_{\pm i}^{(1)}}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial r} (V_i R_{\pm i}^{(1)}) = \frac{\partial U^{(1)}}{\partial r} \quad (59)$$

(généralisation de l'équation (25).)

La perturbation sur le potentiel $U^{(1)}$ est donnée par l'équation de POISSON :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U^{(1)}}{\partial r} \right) = -\rho^{(1)} = -\frac{\pi}{r^2} \sum_{i=1}^N A_i \int (R_{+,i}^{(1)} - R_{-,i}^{(1)}) dJ \quad (60)$$

Vous introduisons les potentiels partiels perturbés $U_i^{(1)}$ et les champs associés $E_i^{(1)}$:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U_i^{(1)}}{\partial r} \right) = -v_i^{(1)} = -A_i \frac{\pi}{r^2} (R_{+,i}^{(1)} - R_{-,i}^{(1)}) \quad (61)$$

$$\text{avec } U^{(1)}(r,t) = \sum_i \int U_i^{(1)}(r,J,t) dJ \quad (62)$$

$$\text{et } E^{(1)}(r,t) = \sum_i \int E_i^{(1)}(r,J,t) dJ$$

Pour chaque "bag" le nombre d'étoiles ayant le même moment angulaire est constant, par conséquent nous avons les conditions aux limites suivantes :

$$E_i^{(1)} = 0 \text{ pour } r = r_{1i}(J) \text{ et } r_{2i}(J) \quad (63)$$

(Le raisonnement est strictement identique à celui effectué dans le cas du Water-Bag à 1 contour).

Nous étudions les modes propres ω et supposons que $\partial/\partial t = i\omega$. Un calcul identique à celui du paragraphe précédent nous donne les équations :

$$i\omega r^2 E_i^{(1)} = \pi A_i V_i (R_{+,i}^{(1)} + R_{-,i}^{(1)}) \quad (64)$$

et finalement nous obtenons le système :

$$\omega^2 r^2 E_i^{(1)} = -v_i^{(0)} r^2 E_i^{(1)} - V_i \frac{\partial}{\partial r} \left(V_i \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_i^{(1)}) \right) \quad (65)$$

pour $i = 1, \dots, N$; pour toutes les valeurs de J avec

$$E^{(1)} = \sum \int E_i^{(1)} dJ$$

Nous avons donc ici un système formé de N sous-systèmes, chaque sous-système étant lui même formé par une infinité d'équations différentielles correspondant à toutes les valeurs possibles de J , toutes ces équations étant couplées par le champ total $E^{(1)}$.

c) Etude de la stabilité : Soit la quantité Q définie par :

$$Q = - \int |E^{(1)}|^2 r^2 dr - \sum_i \iint \frac{1}{2A_i \pi} r^2 E_i^{(1)} \frac{\partial}{\partial r} \left(V_i \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_i^{(1)}) \right) dr dJ \quad (66)$$

$$= \omega^2 \sum_i \iint \frac{r^2 |E_i^{(1)}|^2}{v_i^{(0)}} dr dJ \quad (67)$$

La 2^{ème} intégrale de l'équation (66) peut s'intégrer par parties :

$$Q = - \int |E^{(1)}|^2 r^2 dr + \sum_i \frac{1}{2A_i \pi} \iint \left| V_i \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_i^{(1)}) \right|^2 dr dJ \quad (68)$$

Sur cette expression nous voyons que, tous les A_i étant positifs, ω^2 est nécessairement réel. La stabilité des modes radiaux sera donc déterminée par le signe des quantités ω^2 , donc par le signe de Q . Si tous les A_i n'étaient pas positifs, on pourrait avoir $Q = 0$ c'est à dire $\omega^2 = 0/0$, ω^2 pourrait donc être complexe. Pour montrer que les ω^2 sont tous positifs nous allons suivre la méthode employée dans le cas du modèle à un "bag".

Nous introduisons les fonctions :

$$N_i'(r, J) = 2A_i \pi V_i(r, J) r = v_i^{(0)}(r, J) r^3 \quad (69)$$

$$\text{avec } N(r) = \sum_i N_i(r) = \sum_i \int N_i'(r, J) dJ \quad (70)$$

Ces fonctions vérifient le système d'équations différentielles

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(V_i \frac{\partial N'_i}{\partial r} \right) + \frac{2A_i \pi}{r^2} N = 2A_i \pi \frac{dU^{(0)}}{dr} \quad (71)$$

et satisfont les conditions aux limites :

$$N'_i(r, J) = 0 \text{ pour } r = r_{1i}(J) \text{ et } r_{2i}(J)$$

Ces fonctions ne s'annulent qu'en ces points, par conséquent nous pouvons écrire toute perturbation sous la forme

$$r^2 E'_i(1) = \alpha_i(r, J) N'_i(r, J) \quad (72)$$

où les fonctions $\alpha_i(r, J)$ sont absolument quelconques.

Nous reportons l'expression (72) dans le calcul de Q qui se partage en 4 intégrales :

$$I_1 = - \int \frac{1}{r^2} \left| \sum_i \int \alpha_i N'_i dJ \right|^2 dr \quad (73a)$$

$$I_2 = \int \frac{-dU^{(0)}}{dr} \sum_i \int |\alpha_i|^2 N'_i dr dJ \quad (73b)$$

$$I_3 = \int \frac{N}{r^2} \left(\sum_i \int |\alpha_i|^2 N'_i dJ \right) dr \quad (73c)$$

$$I_4 = - \sum_i \iiint \frac{1}{2A_i \pi} \alpha_i N'_i \left(\frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial r^2} N_i^2 V_i + \frac{\partial \alpha_i}{\partial r} \frac{\partial V_i}{\partial r} N_i^2 - 2V_i^2 \frac{\partial \alpha_i}{\partial r} \frac{\partial N'_i}{\partial r} \right) dr dJ \quad (73d)$$

qui généralisent les équations (43)

$$Q = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

L'intégrale I_4 se simplifie en intégrant par parties : il reste :

$$I_4 = \sum_i \iint \frac{1}{2A_i \pi} \left| \frac{\partial \alpha_i}{\partial r} \right|^2 N_i'^2 V_i dr dJ \quad (74)$$

La somme $I_1 + I_3$ est positive à cause de l'inégalité de SCHWARZ :

$$\int \frac{1}{r^2} \left\{ N \sum_i \int |\alpha_i|^2 N_i' dJ - \left| \sum_i \int \alpha_i N_i' dJ \right|^2 \right\} dr \geq 0$$

Par conséquent Q est positif, et Q ne peut être nul que si tous les α_i sont identiquement nuls. Avec l'hypothèse des A_i tous positifs, nous voyons que les modes radiaux sont tous stables, ω^2 est toujours strictement positif.

En faisant tendre le nombre N de "bags" vers l'infini nous pouvons généraliser ce résultat au cas d'une fonction de distribution $F^{(0)}(\epsilon, J)$ vérifiant la condition $(\partial F^{(0)} / \partial \epsilon)_J < 0$. Actuellement les seuls résultats obtenus pour des fonctions de distribution $F^{(0)}(\epsilon, J)$ sont ceux de HENON /10/ obtenus pour des modèles polytropiques généralisés. Dans le plan (n, m) une courbe sépare les équilibres stables (situés à droite de cette courbe) des équilibres instables (situés à gauche), cette courbe est située dans le rectangle $m \geq -0.7$, $n \leq 1.1$ (les calculs n'ont pas été effectués pour $m < -0.7$).

La condition $(\partial F^{(0)} / \partial \epsilon)_J < 0$ entraîne $n \geq 3/2$. Nous sommes donc en parfait accord avec les résultats obtenus par HENON.

C) CONCLUSION :

Pour les systèmes dont la fonction de distribution à l'équilibre ne dépend que de l'énergie $F^{(0)} = F^{(0)}(\epsilon)$, les modes radiaux et non radiaux sont stables si $dF^{(0)} / d\epsilon < 0$. Nous venons de voir que par une fonction dépendant des deux invariants ϵ et J : $F^{(0)} = F^{(0)}(\epsilon, J)$ les modes radiaux sont stables si $\partial F^{(0)} / \partial \epsilon < 0$. Par contre nous ne savons rien sur la stabilité des modes non radiaux dans ce cas.

D'autre part il serait intéressant de considérer le cas de systèmes pour lesquels la condition $\partial F^{(0)} / \partial \epsilon < 0$ n'est pas toujours vérifiée $\forall \epsilon$. Le système d'équations couplées (64) permet en principe de calculer les fréquences propres ω^2 des modes radiaux pour tout système.

Malheureusement nous avons une double décomposition en champs partiels, ce qui fait que la résolution numérique d'un tel système sera probablement très longue et nécessitera l'emploi d'un gros ordinateur.

CHAPITRE III

STABILITE DES SYSTEMES STELLAIRES A SYMETRIE CYLINDRIQUE

Ce chapitre est consacré à l'étude de la stabilité des systèmes stellaires bi-dimensionnels à symétrie cylindrique. Les systèmes sont formés de tiges de longueur infinie, disposées parallèlement à l'axe Oz du référentiel oxyz ; chaque tige étant constituée par un ensemble d'étoiles et ayant une densité linéaire de masse finie m (Dans ce chapitre nous supposerons que toutes les densités linéaires sont égales à 1).

Nous utiliserons les coordonnées cylindriques : r , θ et les vitesses correspondantes :

$$P = \frac{dr}{dt} \quad \Theta = r \frac{d\theta}{dt}$$

Nous ne considérons que le cas des systèmes à symétrie cylindrique, la fonction de distribution $f(r, P, \theta, t)$ vérifie l'équation de VLASOV qui s'écrit :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + P \frac{\partial f}{\partial r} + \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\Theta^2}{r} \right) \frac{\partial f}{\partial P} - \frac{P\Theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0 \quad (1)$$

à laquelle nous associons l'équation de POISSON :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) = -4\pi G \rho(r, t) = -4\pi G \int f \, dP d\theta \quad (2)$$

Comme pour les systèmes à symétrie sphérique nous choisissons des unités telles que : $4\pi G = 1$

A l'équilibre $\partial/\partial t = 0$, nous connaissons deux invariants du mouvement :

$$\text{l'énergie } \epsilon = (P^2 + \Theta^2)/2 - U^{(0)}(r) \quad (3)$$

et le moment angulaire $I = r\Theta$

A l'équilibre, toute fonction de distribution peut donc se mettre sous la forme

$$f^{(0)}(r, P, \Theta) = F^{(0)}(\epsilon, I) \quad (4)$$

Dans ce chapitre nous rappellerons tout d'abord les caractéristiques du modèle Water-Bag simple, puis nous montrerons, en utilisant le principe d'énergie, que les systèmes en rotation uniforme (c'est-à-dire dont la fonction de distribution dépend d'une combinaison linéaire des 2 invariants) sont stables pour les modes radiaux. Ce résultat sera ensuite généralisé au cas des systèmes dont la fonction $F^{(0)}$ dépend de ϵ et de I , pour cela nous utiliserons la même méthode que pour les systèmes à symétrie sphérique.

A) STABILITE DES SYSTEMES CYLINDRIQUES EN ROTATION UNIFORME

1) Le modèle Water-Bag simple /50/ : Pour un système en rotation uniforme Ω autour de l'axe Oz , la fonction de distribution de l'équilibre peut se mettre sous la forme $F^{(0)} = F^{(0)}(\epsilon - 2\Omega I)$. La fonction de distribution des vitesses est alors isotrope dans un référentiel en rotation uniforme (de vitesse angulaire Ω). Nous définissons le Water-Bag de la façon suivante :

$$\begin{aligned} F^{(0)} &= A && \text{pour } \epsilon - 2\Omega I \leq H \\ F^{(0)} &= 0 && \text{pour } \epsilon - 2\Omega I > H \end{aligned} \quad (5)$$

Soit encore

$$\begin{aligned} F^{(0)} &= A && \text{pour } P^2 + (\Theta - r\Omega)^2 - 2U^{(0)}(r) - r^2\Omega^2 \leq 2H \\ F^{(0)} &= 0 && > 2H \end{aligned} \quad (6)$$

La densité du système est dans ce cas :

$$\rho^{(0)}(r) = A\pi(2H + 2U^{(0)} + r^2\Omega^2) \quad (7)$$

En introduisant les grandeurs sans dimension suivantes :

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{2H + 2U^{(0)}(r) + r^2 \Omega^2}{2H + 2U^{(0)}(0)} & x &= \frac{r}{1} \\ \omega^2 &= \frac{2\Omega^2}{A\pi(H + U^{(0)}(0))} & 1^2 &= \frac{1}{2A\pi} \end{aligned} \quad (8)$$

l'équation de POISSON devient :

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{d\Psi}{dx} \right) + \Psi = \frac{\omega^2}{2} \quad (9)$$

qui est l'équation d'EMDEN pour un polytrope d'indice $n = 1$ ($\gamma = 2$) en rotation uniforme.

A l'intérieur du cylindre, la solution de cette équation s'exprime à l'aide de la fonction de BESSEL de 1^{ère} espèce et d'ordre zéro : $J_0(x)$:

$$\psi(x) = \left(1 - \frac{\omega^2}{2}\right) J_0(x) + \frac{\omega^2}{2} \quad (10)$$

Le rayon a du système est déterminé par la condition :

$\psi(a/1) = 0$, soit par l'équation :

$$J_0\left(\frac{a}{1}\right) = \frac{\omega^2}{\omega^2 - 2} \quad (11)$$

Sur cette dernière équation nous voyons que toutes les valeurs de ω^2 ne sont pas possibles.

Il faut que l'on ait :

$J_0\left(\frac{a}{1}\right) \leq 0$, la plus grande valeur de ω^2 est donc obtenue pour le minimum de $J_0\left(\frac{a}{1}\right)$ c'est à dire pour $\frac{a}{1} = 3,832$ soit $\omega^2 = 0,575$.

Nous avons donc

$$0 \leq \omega^2 \leq 0,575 \text{ et } 2,405 \leq \frac{a}{1} \leq 3,832 \quad (12)$$

Pour des valeurs de ω^2 supérieures à 0,575, il est impossible de trouver une valeur de $\frac{a}{1}$ vérifiant l'équation (11), la densité du système ne s'annule

jamais, le système s'étend donc jusque l'infini. C'est en particulier le cas pour $\omega^2 = 2$, pour cette valeur de ω^2 les forces centrifuges équilibrent en tout point du système les forces gravitationnelles ; la densité du système est donc constante. Dans ce cas cependant le rayon du système peut être choisi arbitrairement.

Pour les systèmes en rotation uniforme vérifiant les conditions (12) nous avons montré que les états stationnaires ont une énergie totale minimum, ce qui entraîne la stabilité de ces équilibres. (DOREMUS et al /50/)

Ce résultat est en accord avec les expériences numériques de HOHL /30/ et de HOCKNEY /29/.

A ce propos il est utile de rappeler la convention que nous avons adoptée pour le potentiel. Pour les systèmes à symétrie sphérique la définition du potentiel ne soulève aucune difficulté, il est possible de choisir la constante dont dépend le potentiel telle que celui-ci tende vers zéro à l'infini. Le potentiel variera en $1/r$ en dehors du système et au centre, pour $r = 0$, il aura une valeur finie. Pour les systèmes bidimensionnels à symétrie cylindrique la situation est différente. A l'extérieur du système nous avons

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dU^{(0)}}{dr} \right) = 0$$

$$\text{Soit : } U^{(0)}(r/l) = - C_1 \text{ Log}(r/l) + C_2 \quad (13)$$

où l est une longueur caractéristique (pour le cas Water-Bag simple nous pouvons choisir $l = 1/(2A\pi)^{1/2}$)

A l'intérieur du système nous avons

$$r \frac{dU^{(0)}}{dr} = - \int_0^r \rho(r') r' dr'$$

Soit pour $r = a$ $r \frac{d\Omega(r)}{dr} \Big|_{r=a} = \frac{M}{2\pi}$ où M est la masse totale du système.

Ceci entraîne que $C_1 = \frac{M}{2\pi}$, et nous choisissons $C_2 = 0$.

2) Stabilité du multiple Water-Bag en rotation uniforme : Considérons donc un système de symétrie cylindrique formé de N "bags" superposés, numérotés de 1 à N de l'intérieur vers l'extérieur, chaque "bag" j est limité dans l'espace des phases par les surfaces $P_{+,j}(r,\theta)$ (pour $P > 0$) et $P_{-,j}(r,\theta)$ (pour $P < 0$). A l'intérieur de la première région limitée par $P_{+,1}$ et $P_{-,1}$ la densité de phase sera $A_1 + A_2 + \dots + A_N$, à l'intérieur de la $i^{\text{ème}}$ région située entre les surfaces $(P_{+,i}, P_{-,i})$ et $(P_{+,i-1}, P_{-,i-1})$ la densité de phase est

$$\sum_{j=1}^N A_j$$

Nous supposons que tous les A_i sont positifs, et nous nous proposons de déterminer les fonctions $P_{\pm,j}(r,\theta)$ qui minimisent l'énergie totale du système, en conservant la masse totale et le moment angulaire total.

Pour cela nous considérons que le système est en rotation, $\Omega(r)$ étant la vitesse angulaire de rotation et nous allons déterminer la fonction de distribution des vitesses minimisant l'énergie cinétique totale du système, l'énergie potentielle étant constante. Puis nous déterminerons totalement les fonctions $P_{\pm,j}(r,\theta)$ en minimisant l'énergie totale.

+ Minimisation de l'énergie cinétique : Nous supposons que la vitesse moyenne $\langle P \rangle$ est nulle c'est-à-dire que l'on a

$$P_{+,j}(r,\theta) = -P_{-,j}(r,\theta) = P_j(r,\theta) \quad (14)$$

Cette condition est imposée par le fait que nous supposons la symétrie cylindrique du système.

L'énergie cinétique est donnée par

$$E_c = \frac{1}{2} \int f \cdot (P^2 + \theta^2) dP d\theta 2\pi r dr$$

$$\text{soit : } E_c = \int \sum_j A_j \left(\frac{P_j^3}{3} + P_j \theta^2 \right) d\theta \, 2\pi r^2 dr \quad (15)$$

qui s'écrit encore

$$E_c = \int K(r) \, 2\pi r \, dr \quad \text{où} \quad K(r) = \sum_j A_j \int \left(\frac{P_j^3}{3} + P_j \theta^2 \right) d\theta$$

est la densité d'énergie cinétique.

Nous allons déterminer la distribution des vitesses en minimisant $K(r)$ pour tout r donné, c'est-à-dire avec les contraintes,

$$\rho_j(r) = 2A_j \int P_j \, d\theta \quad (16)$$

$$\text{et : } r\Omega(r)\rho(r) = \langle \theta \rangle \rho(r) = \sum_j 2A_j \int P_j \theta \, d\theta \quad (17)$$

Pour cela nous introduisons la fonction

$$h(r, \theta) = \sum_j A_j \left(\frac{P_j^3}{3} + P_j \theta^2 \right) + B_j A_j \lambda_{1j}(r) - 2\lambda_2(r) \sum_j B_j \theta A_j \quad (18)$$

avec les multiplicateurs de LAGRANGE $\lambda_{1j}(r)$ et $\lambda_2(r)$

Les fonctions $P_j(r)$ correspondant à un extremum de $K(r)$ sont données par les équations d'EULER-LAGRANGE

$$\frac{\partial h}{\partial P_j} - \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial h}{\partial (\partial P_j / \partial r)} \right) = 0 \quad \text{pour } j = 1, \dots, N$$

d'où nous obtenons :

$$P_j^2 + \left(\theta - \lambda_2(r) \right)^2 = \lambda_2^2(r) - \lambda_{1j} \quad (19)$$

Nous posons : $R_j^2(r) = \lambda_2^2(r) - \lambda_{1j}$ (20)

Tous les coefficients A_i étant positifs, il est évident (il suffit de calculer la seconde variation de K) que cet extremum est effectivement un minimum.

Si nous calculons $\langle \theta \rangle$ (équation (17)) avec la nouvelle fonction $P_j(r, \theta)$ donnée par l'équation (19) nous obtenons :

$$\lambda_2(r) = r\Omega(r) \quad (21)$$

et finalement les fonctions $P_j(r, \theta)$ se mettent sous la forme :

$$P_j^2(r, \theta) = R_j^2(r) - (\theta - r\Omega(r))^2 \quad (22)$$

L'énergie cinétique totale du système est minimale lorsque la distribution des vitesses est isotrope dans un référentiel en rotation $\Omega(r)$.

Il reste maintenant à déterminer les fonctions $R_j(r)$ et $\Omega(r)$

+ Minimisation de l'énergie totale :

Pour un système cylindrique l'énergie potentielle est donnée par

$$E_p = -\frac{1}{2} \int_0^a \rho U 2\pi r dr \quad (23)$$

En remplaçant $\rho(r)$ par son expression déduite de l'équation de POISSON, l'équation (23) s'écrit

$$E_p = \pi \int_0^a U \frac{d}{dr} \left(r \frac{dU}{dr} \right) dr \quad (24)$$

Posons $y = \frac{r}{l}$ (où l est une longueur caractéristique) et intégrons par parties l'équation (24) :

$$E_p = \pi \left\{ \left(U y \frac{dU}{dy} \right) \Big|_0^{a/l} - \int_0^{a/l} \left(y \frac{dU}{dy} \right)^2 \frac{dy}{y} \right\} \quad (25)$$

De nouveau nous intégrons par parties :

$$E_p = \pi \left\{ \left[U y \frac{dU}{dy} - \left(y \frac{dU}{dy} \right)^2 \text{Log } y \right]_0^{a/1} \right. \\ \left. + 2 \int_0^{a/1} y \frac{dU}{dy} \frac{d}{dy} \left(y \frac{dU}{dy} \right) \text{Log } y \, dy \right\} \quad (26)$$

D'après notre définition du potentiel nous avons pour $y \geq \frac{a}{1}$: $U(y) = \frac{-M}{2\pi} \log(y)$

par conséquent le terme $U - y \frac{dU}{dy} \log y$ qui se met en facteur dans le crochet

de l'équation (26) est nul et il reste :

$$E_p = 2\pi \int_0^{a/1} y \frac{dU}{dy} \frac{d}{dy} \left(y \frac{dU}{dy} \right) \text{Log } y \, dy$$

Avec l'équation de POISSON l'énergie potentielle se met sous la forme :

$$E_p = -2\pi l^2 \int_0^{a/1} y \frac{dU}{dy} \rho(y) y \text{Log } y \, dy \quad (27)$$

et nous avons pour l'énergie cinétique :

$$E_c = 2\pi \iint \sum_j A_j \left(\frac{P_j^3}{3} + P_j \theta^2 \right) d\theta \, dr$$

Les $P_j(r, \theta)$ étant donnés par l'équation (22).

Calculons E_c en fonction de $R_j(r)$ et de $\Omega(r)$:

$$E_c = \frac{\pi^2}{2} \sum_j A_j \int R_j^4 r \, dr + 2\pi^2 \sum_j A_j \int \Omega^2 r^3 R_j^2 \, dr$$

Nous introduisons la nouvelle variable $u = \frac{y^2}{2}$ et les nouvelles fonctions

$$\phi_j(u) = \int_0^{l(2u)^{1/2}} \rho_j(r) dr \quad (28)$$

nous avons donc

$$\frac{d\phi_j}{du} = l^2 \rho_j(r) = \pi l^2 A_j R_j^2(r)$$

Avec ces nouvelles fonctions les énergies potentielles et cinétiques s'écrivent :

$$E_p = \pi \int \sum_j \phi_j \cdot \sum_i \frac{d\phi_i}{du} \text{Log}(2u) du \quad (29)$$

$$E_c = \frac{1}{2l^2} \sum_j \int \frac{1}{A_j} \left(\frac{d\phi_j}{du} \right)^2 du + 2\pi l^2 \int \sum_j \Omega^2 u \frac{d\phi_j}{du} du$$

Nous voulons déterminer les fonctions $\Omega(r)$ et $R_j(r)$ qui extremisent l'énergie totale $E_T = E_c + E_p$ en maintenant constants la masse totale du système M et le moment angulaire total J :

$$M = 2\pi \int \sum_j \frac{d\phi_j}{du} du \quad J = 4\pi l \int \sum_j \Omega \frac{d\phi_j}{du} u du \quad (30)$$

Nous introduisons la fonction

$$g^*(u, \dots, \phi_j, \dots, \frac{d\phi_j}{du}, \dots, \Omega) = g + \lambda_1 \sum_j \frac{d\phi_j}{du} + 2\pi\lambda_2 \sum_j \Omega u \frac{d\phi_j}{du}$$

où g est définie par

$$E_T = \int g(u, \dots, \phi_j, \dots, \frac{d\phi_j}{du}, \dots, \Omega) du$$

et λ_1 et λ_2 sont 2 multiplicateurs de LAGRANGE.

Les fonctions $R_j(r)$ et $\Omega(r)$ cherchées sont alors données par le système d'équations :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g^*}{\partial \phi_j} - \frac{d}{du} \left(\frac{\partial g^*}{\partial (d\phi_j/du)} \right) &= 0 \quad \text{pour } j = 1, \dots, N \\ \frac{\partial g^*}{\partial \Omega} - \frac{d}{du} \left(\frac{\partial g^*}{\partial (d\Omega/du)} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (31)$$

Ce système s'écrit :

$$\frac{d}{dr} (R_j^2) = 2 \frac{dU}{dr} - 2\Omega r (\lambda_2 + \Omega) - r^2 \frac{d\Omega}{dr} (\lambda_2 + 2\Omega) \quad (32)$$

et $\lambda_2 + 2\Omega = 0$.

Cette dernière équation montre que Ω est constant, la rotation est donc uniforme et les fonctions $R_j(r)$ sont :

$$R_j^2(r) = 2H_j + 2U(r) + r^2\Omega^2 \text{ où } H_j \text{ sont des constantes.} \quad (33)$$

Dans ce calcul les extrémités a_j pour lesquelles les fonctions R_j^2 s'annulent peuvent varier, il faut alors ajouter les conditions

$$\frac{\partial g^*}{\partial (d\phi_j/du)} = 0 \quad \text{pour } u = \frac{1}{2} \frac{a_j^2}{l^2}$$

qui ne modifient pas les résultats.

Les N bords de l'espace des phases sont donc limités par les surfaces

$$r_j^2 = R_j^2 + (\theta - r\Omega)^2 - 2U(r) - r^2\Omega^2$$

Comme nous nous sommes limités à l'étude du cas où tous les coefficients A_j sont positifs, le critère de Legendre

$$\frac{\partial^2 g^*}{\partial (d\phi_j/du)^2} = 0$$

nous permet d'affirmer que cet extremum n'est

pas un maximum. Pour montrer qu'il s'agit d'un minimum nous devons étudier le signe de la seconde variation de l'énergie totale : $\delta^2 E_T$. Pour cela nous perturbons légèrement les fonctions $\phi_j(u)$ qui deviennent $\phi_j(u) + \delta\phi_j(u)$. La masse de chaque bag étant conservée nous avons

$$\delta\phi_j(u) = 0 \text{ pour } u = 0 \text{ et } u = \frac{a_j^2}{2l^2} \quad (34)$$

En revenant à la variable r , $\delta^2 E_T$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \delta^2 E_T = & \pi \sum_j \int \frac{1}{2A_j \pi r} \left(\frac{d\delta\phi_j}{dr} \right)^2 dr - \pi \int \left(\sum_j \delta\phi_j \right)^2 \frac{dr}{r} \\ & + \pi \Omega^2 \frac{\left(\int \sum_j r^2 \frac{d\delta\phi_j}{dr} dr \right)^2}{\int r^3 \rho^{(0)} dr} \end{aligned} \quad (35)$$

Nous introduisons les fonctions $f_j(r)$ définies par

$$f_j(r) = - \frac{r \frac{d\rho_j^{(0)}}{dr}}{\rho_j^{(0)}} \quad (36)$$

Dans l'intervalle $0 \leq r \leq a_j$ la fonction $f_j(r)$ est toujours positive, elle est nulle seulement pour le point $r = 0$. Par conséquent toute fonction quelconque $\delta\phi_j(r)$ peut se mettre sous la forme :

$$\delta\phi_j(r) = f_j(r) \times \alpha_j(r) \quad (37)$$

où $\alpha_j(r)$ est une fonction quelconque devant satisfaire la condition $\alpha_j(a_j) = 0$

$$\text{Soit} \quad W = \int \sum_j \frac{1}{2A_j \pi r} \left(\frac{d\delta\phi_j}{dr} \right)^2 dr - \int \left(\sum_j \delta\phi_j \right)^2 \frac{dr}{r} \quad (38)$$

si W est positif alors nécessairement il en sera de même de $\delta^2 E_T$.

W s'écrit encore

$$W = \int \sum_j \delta\phi_j \left(\frac{1}{2A_j} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d\delta\phi_j}{dr} \right) + \frac{\left(\sum_i \delta\phi_i \right)}{r} \right) dr \quad (39)$$

Il est facile de vérifier que les fonctions $f_j(r)$ précédemment définies vérifient les équations

$$\frac{1}{2A_j\pi} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{df_j}{dr} \right) + \frac{\sum_i f_i}{r} = 0 \quad (40)$$

En effet nous avons

$$f_j(r) = -r \frac{d\rho_j^{(0)}}{dr} = -2 \left(r \frac{dU^{(0)}}{dr} + r^2 \Omega^2 \right) \pi A_j$$

$$\frac{1}{2} \frac{df_j}{dr} = -2\pi A_j \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dU^{(0)}}{dr} \right) + 2\Omega^2 \right) = 2\pi A_j \left(\sum_i \rho_i^{(0)} - 2\Omega^2 \right)$$

Soit :

$$\frac{1}{2A_j\pi} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{df_j}{dr} \right) = + \sum_i \frac{d\rho_i^{(0)}}{dr} = - \frac{1}{r} \sum_i f_i$$

Les fonctions $f_j(r)$ vérifient donc les équations (40)

Pour la suite du calcul il est utile d'utiliser la variable $y = \frac{r^2}{r}$, alors

l'équation (40) s'écrit :

$$\frac{1}{2A_j\pi} \frac{d^2 f_j}{dy^2} + \frac{\sum_i f_i}{2y} = 0 \quad (41)$$

et w se met sous la forme :

$$w = - \int \sum_j \delta\phi_j \left(\frac{1}{2A_j\pi} \frac{d^2 \delta\phi_j}{dy^2} + \frac{\sum_i \delta\phi_i}{2y} \right) dy \quad (42)$$

En introduisant l'expression (37) cette équation devient :

$$W = - \int \sum_j f_j \alpha_j \left(\frac{1}{2A_j \pi} \right) (f_j'' \alpha_j + 2\alpha_j' f_j' + f_j \alpha_j'') dy$$

$$- \int \left(\sum_j f_j \alpha_j \right)^2 \frac{dy}{2y} \quad \text{où} \quad \alpha_j' = \frac{d\alpha_j}{dy} \quad (43)$$

Soit en tenant compte de (41) :

$$W = - \sum_j \int \frac{1}{2A_j \pi} f_j \alpha_j (2\alpha_j' f_j' + f_j \alpha_j'') dy$$

$$+ \int \left\{ \left(\sum_j f_j \alpha_j^2 \right) \left(\sum_j f_j \right) - \left(\sum_j f_j \alpha_j \right)^2 \right\} \frac{dy}{2y} \quad (44)$$

La deuxième intégrale est positive ou nulle à cause de l'inégalité de SCHWARZ, quant à la première intégrale il suffit d'intégrer par parties le deuxième terme et il reste :

$$W = \sum_j \int \frac{1}{2A_j \pi} f_j^2 \left(\frac{d\alpha_j}{dy} \right)^2 dy + \int \left\{ \left(\sum_j f_j \alpha_j^2 \right) \left(\sum_j f_j \right) - \left(\sum_j f_j \alpha_j \right)^2 \right\} \frac{dy}{2y} \quad (45)$$

Cette expression montre que W est toujours positif : W ne peut être nul que si tous les α_j sont constants, les conditions $\alpha_j(r = a_j) = 0$ entraîneraient $\alpha_j = 0$. $\delta^2 E_T$ est donc toujours strictement positif et l'extremum est un minimum. La minimisation de l'énergie totale d'un multiple Water-Bag conduit aux équations d'équilibre d'un système en rotation uniforme $\Omega = \text{constante}$, les "bags" étant limités par les surfaces $2H_j = p^2 + (\theta - r\Omega)^2 - 2U - r^2\Omega^2 = \text{constante}$, la distribution des vitesses est donc isotrope dans un référentiel en rotation avec la fréquence angulaire Ω .

Ce modèle correspond à une fonction de distribution $F^{(0)} = F^{(0)}(H)$ où l'invariant $H = (\varepsilon - \Omega I)$ est une combinaison linéaire des 2 invariants du mouvement ε et I . La propriété établie pour le multiple Water-Bag s'étend à toute

fonction $F^{(0)}(H)$, la condition $A_1 > 0 \forall_1$, étant équivalente à $dF^{(0)}/dH < 0$. Les équilibres correspondant à cette classe de fonctions de distribution ont donc une énergie totale minimum. De même que pour les systèmes à symétrie sphérique, cette propriété entraîne la stabilité de ces systèmes pour des perturbations radiales, d'autre part si on part d'états voisins de ces états d'équilibres, les systèmes présentent alors des excès d'énergie qui les empêchent d'accéder à ces états stationnaires. Nous aboutissons alors à des états quasi-stationnaires où une grande majorité d'étoiles ont des trajectoires correspondant à l'état d'équilibre théorique et une minorité d'étoiles avec des grandes énergies ont des trajectoires très excentriques. Ceci a été mis en évidence par les expériences numériques réalisées par HOCKNEY /29/ et HOHL /30/.

3) STABILITE DES SYSTEMES BIDIMENSIONNELS DEPENDANT DES 2 INVARIANTS ϵ, I :

Dans ce paragraphe nous étudierons la stabilité radiale des systèmes cylindriques en rotation quelconque $\Omega(r)$ dont la fonction de distribution dépend des 2 invariants du mouvement ϵ et I . Pour cela nous utiliserons le modèle du multiple Water-Bag et nous utiliserons la même méthode que pour les systèmes à symétrie sphérique, c'est-à-dire que nous utiliserons les variables r, P et $I = r\theta$ et pour chaque "bag" nous considérerons les densités partielles d'étoiles de même moment angulaire ; nous montrerons que les fréquences propres des oscillations radiales sont toutes positives.

Avec les variables r, P et $I = r\theta$ la fonction de distribution $g(r, P, I, t) = f(r, P, \theta, t)$ vérifie l'équation de VLASOV qui s'écrit :

$$\frac{\partial g}{\partial t} + P \frac{\partial g}{\partial r} + \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{I^2}{r^3} \right) \frac{\partial g}{\partial P} = 0 \quad (46)$$

A cette équation il faut associer l'équation de POISSON :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) = -\rho(r, t) = -\frac{1}{r} \iint g(r, P, I, t) dP dI \quad (47)$$

Construction du multiple Water-Bag : Considérant la fonction de distribution $f(r, P, \theta, t)$ nous traçons N surfaces $f = \text{constante}$ dans l'espace des phases (r, P, θ)

et entre ces surfaces on suppose que la densité de phase reste constante. Les "bags" étant numérotés de l'intérieur vers l'extérieur, le $i^{\text{ème}}$ bag a une densité de phase A_i et est limité par les surfaces $B_{\pm,i}(r,\theta,t)$, le multiple Water-Bag étant formé par la somme de ces N bags. Si l'on utilise les variables r, I et t les surfaces sont alors

$$P_{\pm,i}(r,I,t) = B_{\pm,i}(r,\theta,t) \quad (48)$$

et vérifient les équations

$$\frac{\partial P_{\pm,i}}{\partial t} + P_{\pm,i} \frac{\partial P_{\pm,i}}{\partial r} = \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{I^2}{r^3} \quad (49)$$

La densité totale donnée par

$$\rho(r,t) = \sum_i \int \frac{A_i}{r} (P_{+,i} - P_{-,i}) dI \quad (50)$$

peut s'écrire sous la forme d'une somme de densités partielles $\rho(r,t) = \sum_i \rho_i(r,t)$

où les $\rho_i(r,t)$ sont les densités partielles de chacun des N bags.

$$\rho_i(r,t) = \int \frac{A_i}{r} (P_{+,i} - P_{-,i}) dI \quad (51)$$

Chaque densité partielle $\rho_i(r,t)$ pouvant se décomposer en densités partielles $v_i(r,I,t)$ représentant la densité des étoiles ayant le moment angulaire I dans le $i^{\text{ème}}$ "bag".

$$v_i(r,I,t) = \frac{A_i}{r} (P_{+,i} - P_{-,i}) \quad (52)$$

et
$$\rho_i(r,t) = \int v_i(r,I,t) dI$$

Comme dans le cas sphérique nous associons les potentiels et les champs partiels :

$$U(r,t) = \sum_i U_i(r,t) = \sum_i \int U'_i(r,I,t) dI$$

$$E(r,t) = \frac{\partial U}{\partial r} \quad E_i(r,t) = \frac{\partial U_i}{\partial r} \quad E'_i = \frac{\partial U'_i}{\partial r} \quad (53)$$

et :

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U'_i}{\partial r} \right) = -\frac{A_i}{r} (P_{+,i} - P_{-,i}) = -v_i$$

1) Etude de l'état stationnaire : Les équations deviennent à l'équilibre

$$P_{\pm,i} \frac{\partial P_{\pm,i}}{\partial r} = \frac{dU^{(0)}}{dr} + \frac{I^2}{r^3} \quad (54)$$

qui s'intègrent :

$$P_{\pm,i}(r,I) = \pm V_i(r,I) = \pm (2H_i + 2U^{(0)} - I^2/r^2 - f_i(I))^{1/2} \quad (55)$$

Les quantités H_i sont des constantes et les fonctions $f_i(I)$ caractérisent l'anisotropie de la fonction de distribution des vitesses.

Examinons la forme des fonctions $f_i(I)$ dans 2 cas particuliers importants :

+ cas d'un système en rotation uniforme Ω :

Dans ce cas la fonction de distribution dépend de la combinaison des 2 invariants ϵ et I : $H = \epsilon - 2\Omega I$ et $f(I) = -2\Omega I$, les "bags" sont alors limités par les surfaces $H_i = \text{constante}$.

+ cas d'une distribution ellipsoïdale des vitesses : Pour un tel système l'argument H de la fonction de distribution est une combinaison linéaire de ϵ, I, I^2 :

$H = a\epsilon + 2bI + cI^2$ (OGORODNIKOV /40/) où a, b et c sont des constantes ce qui peut encore s'écrire

$$H = h^2 (P^2 + \lambda^2 (\Theta - \Theta_0)^2) + \sigma^2$$

$$\text{où } h^2 = a/2 \quad \lambda^2 = 1 + k_2 r^2$$

$$\Theta_0 = -\frac{k_1 r}{1 + k_2 r^2} \quad k_1 = \frac{b}{a} \quad k_2 = \frac{c}{a}$$

$$\sigma^2 = -2h^2 (U^{(0)} + 1/2 \lambda^2 \Theta_0^2)$$

Dans ce cas on a $f_i(I) = \frac{b}{a} I + \frac{c}{2a} I^2$, chaque bag est limité par les surfaces

$$H = \text{constante} = H_i$$

Dans la suite de ce travail on considérera des fonctions $f_i(I)$ quelconques, on supposera l'équilibre caractérisé par les fonctions $V_i(r, I)$. Ces fonctions s'annulent en deux points $r = a_{1i}$ et $r = a_{2i}$. La seule hypothèse que nous ferons sur l'équilibre est de supposer que tous les coefficients A_i sont > 0 ; soit

$$\left. \frac{\partial F^{(0)}}{\partial \epsilon} \right|_{I = \text{cte}} < 0$$

2) Equations linéarisées autour de l'équilibre :

Afin d'étudier la stabilité linéaire des modes radiaux nous perturbons les surfaces $P_{\pm, i}$ qui deviennent

$$P_{\pm, i}(r, I, t) = \pm V_i(r, I) + P_{\pm, i}^{(1)}(r, I, t) \quad (57)$$

Les perturbations $P_{\pm, i}^{(1)}$ vérifient les équations

$$\frac{\partial}{\partial t} P_{\pm, i}^{(1)} \pm \frac{\partial}{\partial r} (P_{\pm, i}^{(1)} V_i) = \frac{\partial U^{(1)}}{\partial r} \quad (58)$$

où $U^{(1)}$ est la perturbation sur le potentiel et nous aurons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U_i^{(1)}}{\partial r} \right) &= -V_i^{(1)} \\ U^{(1)} &= \sum_i \int U_i^{(1)}(r, I, t) dI \\ E^{(1)} &= \sum_i \int E_i^{(1)}(r, I, t) dI \end{aligned} \quad (59)$$

Pour les modes radiaux, les moments angulaires des étoiles se conservent au cours du temps, nous avons donc les conditions aux limites

$$E_i^{(1)} = 0 \text{ pour } r = a_{1i}(I) \text{ et } r = a_{2i}(I)$$

Comme dans le cas sphérique nous étudions les modes propres : $\partial/\partial t = i\omega$; et par un calcul identique nous aboutissons au système d'équations couplées:

$$\omega^2 r E_i^{(1)} = -V_i^{(0)} r E^{(1)} - V_i \frac{\partial}{\partial r} \left(V_i \frac{\partial}{\partial r} (r F_i^{(1)}) \right) \quad (60)$$

pour $i = 1, \dots, N$ et pour toutes les valeurs de I

$$\text{avec } E^{(1)}(r) = \sum_i \int E_i^{(1)}(r, I) dI$$

3) Etude de la stabilité : Le signe de ω^2 est lié au signe de la quantité Q :

$$Q = \omega^2 \sum_i \iint \frac{r |E_i^{(1)}|^2}{v_i^{(0)}} dr dI$$

(61)

$$= - \int |E^{(1)}|^2 r dr - \sum_i \iint \frac{1}{2A_i} r E_i^{(1)} \frac{\partial}{\partial r} \left(v_i \frac{\partial}{\partial r} (r E_i^{(1)}) \right) dr dI$$

En intégrant par parties le deuxième terme de (61) nous voyons que Q donc ω^2 est toujours réel (tous les A_i sont positifs). Pour montrer que les fréquences propres ω^2 sont toujours positives nous utilisons la même technique que dans le cas sphérique. Les fonctions que nous introduisons sont :

$$N_i'(r, I) = v_i(r, I) r^2 = 2A_i v_i r$$

(62)

$$\text{et } N(r) = \sum_i N_i(r) = \sum_i \int N_i'(r, I) dI = \rho(r) r^2$$

qui vérifient les équations différentielles :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(v_i \frac{\partial N_i'}{\partial r} \right) + \frac{2A_i N}{r} = 2(2A_i) \frac{dU^{(0)}}{dr}$$

(63)

avec les conditions aux limites $N_i'(r, I) = 0$ pour $r = a_{1i}(I)$ et $r = a_{2i}(I)$

Toute perturbation $r E_i^{(1)}$ peut s'écrire

$$r E_i^{(1)} = \alpha_i(r, I) \times N_i'(r, I)$$

(64)

car les fonctions $N_i'(r, I)$ ne s'annulent pas pour $a_{1i} < r < a_{2i}$, les fonctions $\alpha_i(r, I)$ sont totalement arbitraires.

En reportant cette expression dans l'équation Q, un calcul identique à celui effectué dans le cas sphérique conduit au résultat :

$$\begin{aligned}
Q = & \sum \iint \frac{1}{2A_i} \left| \frac{\partial \alpha_i}{\partial r} \right|^2 N_i'^2 V_i dI dr \\
& + \iint \left(- \frac{dU^{(0)}}{dr} \right) \sum_i |\alpha_i|^2 N_i' dI dr \\
& + \int \frac{1}{r} \left\{ N \sum_i \int \alpha_i^2 N_i' dI - \left| \sum_i \int \alpha_i N_i' dI \right|^2 \right\} dr
\end{aligned} \tag{65}$$

La dernière intégrale est positive ou nulle à cause de l'inégalité de SCHWARTZ et les 2 autres intégrales sont évidemment positives. De plus ω^2 ne peut être égal à zéro, il n'y a pas de mode marginal.

Ce résultat établi pour un multiple Water-Bag se généralise au cas d'une fonction de distribution $F^{(0)}(\epsilon, I)$ vérifiant la condition

$$\left. \frac{\partial F^{(0)}}{\partial \epsilon} \right|_{I = \text{cte}} < 0$$

Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons montré que les systèmes dont la fonction de distribution est du type $F^{(0)}(\epsilon, I)$ avec

$$\left. \frac{\partial F^{(0)}}{\partial \epsilon} \right|_{I = \text{cte}} < 0 \text{ sont linéairement stables pour des perturbations radiales.}$$

De même que pour les systèmes sphériques le système d'équations (60) permet de calculer les fréquences propres ω^2 dans le cas plus général où l'on aurait une fonction $F^{(0)}(\epsilon, I)$ quelconque c'est-à-dire où les A_i ne seraient pas tous positifs. D'autre part il serait évidemment très intéressant d'étudier la stabilité des modes non radiaux de tous ces équilibres.

CHAPITRE IV

ETUDE DES SYSTEMES UNIDIMENSIONNELS PLANS

EN DYNAMIQUE STELLAIRE ET EN PLASMAS

Dans les chapitres précédents nous avons étudié la stabilité radiale de systèmes bi et tri-dimensionnels pour lesquels la fonction de distribution $F^{(0)}(\epsilon, I)$ vérifie la condition $\partial F^{(0)} / \partial \epsilon < 0$, pour tout ϵ . Cette condition de stabilité n'est qu'une condition suffisante, les expériences numériques réalisées récemment par HENON /10/ et GOLDSTEIN /51/ montrent qu'elle n'est pas nécessaire.

L'étude de la stabilité de systèmes bi et tri-dimensionnels avec des fonctions $F^{(0)}(\epsilon, I)$ générales est évidemment un problème difficile, pour les raisons exposées aux chapitres précédents.

En conséquence, dans un premier temps, le retour à des géométries plus simples, c'est-à-dire à des systèmes plans permettant une étude plus complète semble assez utile.

Dans ce chapitre nous nous intéresserons simultanément aux systèmes plans en Dynamique Stellaire et en Physique des Plasmas. Dans un premier paragraphe nous préciserons le modèle utilisé et nous examinerons les différents états stationnaires correspondant au double Water-Bag en Stellaire et en Plasma ; nous verrons que dans ce dernier cas il est possible de distinguer plusieurs catégories d'équilibre. Dans un deuxième paragraphe nous rappellerons quelques expériences numériques réalisées en Stellaire et en Plasma. Dans le troisième paragraphe nous établirons les équations de base pour l'étude de la stabilité de ces équilibres en linéarisant les équations autour de ces équilibres.

Dans le quatrième paragraphe, nous exposerons deux méthodes permettant ces études de stabilité. Ces méthodes seront ensuite appliquées à l'étude des systèmes apériodiques (5^{ème} paragraphe) et périodiques (6^{ème} paragraphe). Finalement dans le dernier paragraphe nous généraliserons la méthode appliquée en cinquième paragraphe (pour un double Water-Bag) au cas d'un multiple Water-Bag approchant une fonction de distribution donnée.

A) CLASSIFICATION DES ETATS STATIONNAIRES :

Nous supposons les systèmes stellaires stratifiés en plans parallèles au plan $x = 0$, chaque plan ayant une densité superficielle de masse m . La force d'attraction entre 2 plans est constante. Par souci de simplification, nous appellerons étoile chaque plan, le modèle est alors constitué par un ensemble d'étoiles de "masse" m évoluant suivant une direction. Nous étudierons également les plasmas unidimensionnels nous considérerons le plasma formé de deux types de particules : des électrons de masse m , de charge e , et des ions de charge $-e$. Nous supposerons que ces ions ont une masse infinie par rapport à celle des électrons, ils seront donc considérés comme étant immobiles. De plus la densité des ions sera considérée uniforme. L'espace des phases est un espace à deux dimensions (x, v) et à l'équilibre, les fonctions de distribution ne dépendent que d'un invariant l'énergie par unité de masse ϵ

Le modèle du multiple Water-Bag est formé par la superposition des N "bags", chaque bag i étant limité par les contours $V_{+,i}(x,t)$ et $V_{-,i}(x,t)$ et ayant une densité de phase A_i constante. (voir figures 1 et 2 dans l'introduction)

1) Systèmes stellaires : Nous considérons un multiple Water-Bag. Les équations d'évolution des contours sont :

$$\frac{\partial}{\partial t} V_{\pm,i}(x,t) + V_{\pm,i} \frac{\partial}{\partial x} V_{\pm,i} = \frac{\partial U}{\partial x} \quad (1)$$

avec
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -4\pi G m \rho(x,t) = -4\pi G m \int f(x,v,t) dv$$

$$\text{et } \rho(x,t) = \sum_{i=1}^N A_i (V_{+,i} - V_{-,i}) \quad (2)$$

En introduisant les densités partielles :

$$\rho_i(x,t) = A_i (V_{+,i} - V_{-,i}) \quad (3)$$

on a :

$$\rho(x,t) = \sum_i \rho_i(x,t)$$

A l'équilibre le système (1) se réduit à

$$V_{\pm,i}^{(0)} \frac{d}{dx} V_{\pm,i}^{(0)} = \frac{dU^{(0)}}{dx}$$

soit

$$V_{\pm,i}^{(0)}(x) = \pm V_i(x) = \pm \left(2\epsilon_i + 2U^{(0)}(x) \right)^{1/2} \quad (4)$$

et l'on a donc :

$$\rho_i^{(0)}(x) = 2A_i V_i(x) = 2A_i \left(2\epsilon_i + 2U^{(0)} \right)^{1/2} \quad (5)$$

Les constantes ϵ_i représentent les énergies par unité de masse des particules dont les trajectoires limitent les "bags". Le potentiel $U^{(0)}(x)$ est obtenu à partir de l'équation

$$\frac{d^2 U^{(0)}}{dx^2} = -4\pi m G \sum_i 2A_i \left(2\epsilon_i + U^{(0)} \right) \quad (6)$$

Les systèmes pour lesquels tous les coefficients A_i sont positifs (c'est-à-dire $dF^{(0)}/d\epsilon < 0$) sont stables KULSRUD et MARK /25/, FEIX et al /59/. Nous nous intéressons ici au cas où tous les coefficients A_i ne sont pas positifs. Nous étudierons d'abord la stabilité dans le cas où le nombre de "bags" est réduit à 2, avec $A_1 < 0$, $A_2 > 0$ et $A_1 + A_2 > 0$.

Le cas $N = 2$ est évidemment le cas particulier le plus simple de modèle multiple Water-Bag, mais cependant il permet déjà de représenter un double faisceau.

Du fait du petit nombre de paramètres (2) nous pourrions faire une étude complète de la stabilité, ce sera une première étape vers le cas général.

Les deux paramètres du modèle sont définis par :

$$\alpha = \frac{-A_1}{A_2} \text{ et } \beta = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \quad (7)$$

Dans le plan (α, β) tous les points situés à l'intérieur du carré défini par

$$0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1$$

correspondent à des états stationnaires du type double Water-Bag. L'axe $x = 0$ est pris au maximum des vitesses qui correspond au maximum du potentiel $U^{(0)}$. Donc pour $x = 0$ nous avons :

$$U^{(0)}(0) = 0, E^{(0)}(0) = 0 \quad (8)$$

2) Plasmas

a) Normalisation : La fonction de distribution des électrons est un double Water-Bag, les ions sont considérés fixes et répartis uniformément. (la densité des ions sera notée n_1 pour ne pas confondre avec la densité électronique ρ_1 du 1^{ère} "bag")

Avec notre définition du potentiel les équations d'évolution des contours sont :

$$\frac{\partial}{\partial t} V_{\pm,1} + V_{\pm,1} \frac{\partial V_{\pm,1}}{\partial x} = \frac{e}{m} E = \frac{\partial U}{\partial x} \quad (9)$$

Ces équations sont associées à l'équation de POISSON

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{e}{\epsilon_0} (\rho(x,t) - n_1)$$

Soit encore

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{e^2}{m\epsilon_0} (\rho(x,t) - n_1) \quad (10)$$

A l'équilibre les fonctions $V_{\pm i}^{(0)}(x)$ sont donc

$$V_{\pm i}^{(0)}(x) = \pm V_i(x) = \pm (2\epsilon_i + 2U^{(0)}(x))^{1/2} \quad (11)$$

De même qu'en Dynamique Stellaire nous choisissons l'origine $x = 0$ en un maximum des vitesses $V_i(x)$ et nous avons

$$E^{(0)}(0) = U^{(0)} = 0 \quad (12)$$

Les deux paramètres $\alpha = -A_1/A_2$ et $\beta = \epsilon_1/\epsilon_2$, ne suffisent plus à caractériser l'équilibre, il faut introduire un troisième paramètre γ lié à la densité des ions n_i , nous prendrons $\gamma = n_i/\rho_e^{(0)}$, le rapport des densités ionique et électronique au point $x=0$.

Soit ϵ_2 l'unité d'énergie, nous définissons l'unité de longueur l par :

$$l^2 = \frac{m\epsilon_0}{2e^2} \frac{V_2^2(0)}{2A_1V_1(0) + 2A_2V_2(0)} \quad (13)$$

l joue le rôle d'une longueur de DEBYE; en fonction de α et β , l est donné par :

$$l^{-2} = \frac{e^2}{m\epsilon_0} 2A_2 (2/\epsilon_2)^{1/2} (1 - \alpha\sqrt{\beta}) \quad (14)$$

et γ s'obtient par :

$$\gamma = \frac{1}{1 - \alpha\sqrt{\beta}} \frac{n_i}{2A_2 (2\epsilon_2)^{1/2}} \quad (15)$$

Posant $z = \frac{x}{l}$ et $\phi = \frac{U^{(0)}(x)}{\epsilon_2}$, l'équation de POISSON devient :

$$\frac{d^2\phi}{dz^2} = \phi'' = \frac{1}{1 - \alpha\sqrt{\beta}} \left((1 + \phi)^{1/2} - (\beta + \phi)^{1/2} \right) - \gamma \quad (16)$$

(si $1 + \phi$ ou $\beta + \phi$ devient négatif, $(1 + \phi)^{1/2}$ ou $(\beta + \phi)^{1/2}$ est à remplacer par zéro)

Pour obtenir le champ électrique, il suffit d'intégrer l'équation précédente :

$$\left(\frac{d\phi}{dz}\right)^2 = (\phi')^2 = \frac{4}{3} \frac{1}{(1 - \alpha\sqrt{\beta})} \{ (1 + \phi)^{3/2} - \alpha(\beta + \phi)^{3/2} - (1 - \alpha\beta)^{3/2} \} - 2\gamma\phi \quad (17)$$

en tenant compte des conditions $\phi(0) = 0$, $\phi'(0) = 0$

b) Classification des états stationnaires, /53/, /54/ :

Tout d'abord déterminons les valeurs des paramètres α, β, γ pour lesquelles il existe des équilibres du type double Water-Bag. Pour $x = 0$, nous avons $\phi''(0) = 1 - \gamma$, le potentiel $\phi(x)$ sera donc maximum en ce point si $\gamma > 1$. La condition $\gamma < 1$ entraînerait l'existence d'un minimum, ce qui est incompatible avec l'hypothèse faite précédemment qui supposait un maximum des vitesses en $x = 0$.

Donc pour $0 \leq \alpha \leq 1$, $0 \leq \beta < 1$ et $\gamma > 1$, nous avons des équilibres du type double Water-Bag. Examinons maintenant les différents types d'équilibre possible. Pour cela considérons ϕ'' comme étant une fonction de la variable ϕ (donnée par l'équation 16) : $\phi''(x) = G(\phi)$ Si $G(\phi = -\beta) > 0$, alors $G(\phi)$ admet 3 zéros que nous désignons par ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 , et la fonction $G(\phi)$ est représentée par la figure 9a.

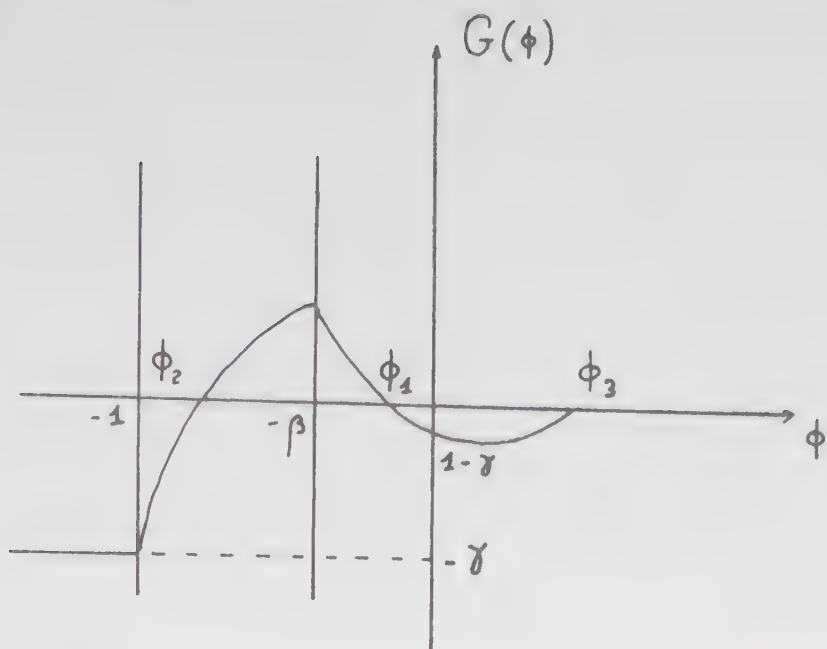
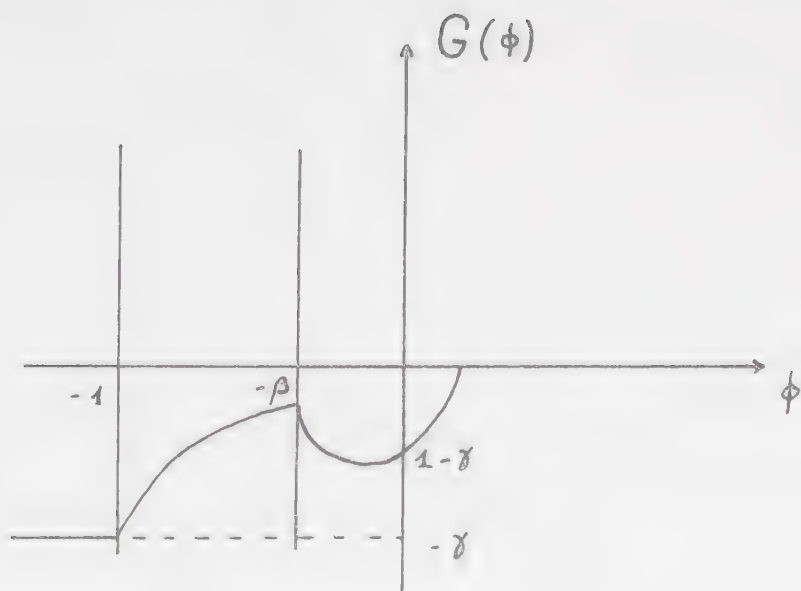
Etant donné que nous avons choisi ϕ maximum et égal à zéro pour $x = 0$, le potentiel ϕ est toujours négatif, la demi-droite $\phi > 0$ nous est interdite, et la racine ϕ_3 ne joue aucun rôle dans la discussion ; il reste ϕ_1 et ϕ_2 qui sont des points d'inflexion de $\phi(x)$.

Si au contraire $G(-\beta) \leq 0$, il n'y a qu'une racine ϕ_3 (Fig 9b), le potentiel $\phi(x)$ est alors toujours décroissant ; lorsque le potentiel ϕ atteint la valeur $-\beta$, le contour intérieur se ferme, puis lorsque ϕ est égal à -1 le contour extérieur se ferme.

Le système est donc apériodique et ces solutions seront dites du type 3. (Fig 10a et 10c)

Si $G(-\beta) > 0$: les 2 racines ϕ_1 et ϕ_2 existent. On aura des solutions périodiques si l'on peut trouver des points

$x = \pm \frac{\lambda}{2}$ où le champ électrique s'annule $\left(\phi' \left(\pm \frac{\lambda}{2} \right) = 0 \right)$ et si en ces points

Figure 9a ($G(-\beta) > 0$)Figure 9b ($G(-\beta) < 0$)

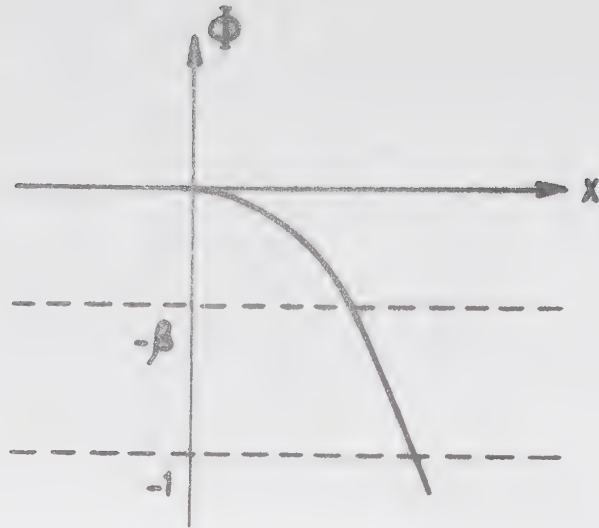


Figure 10a

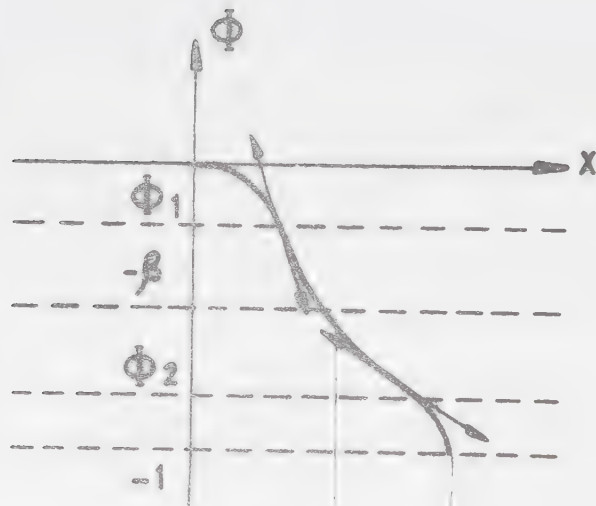


Figure 10b

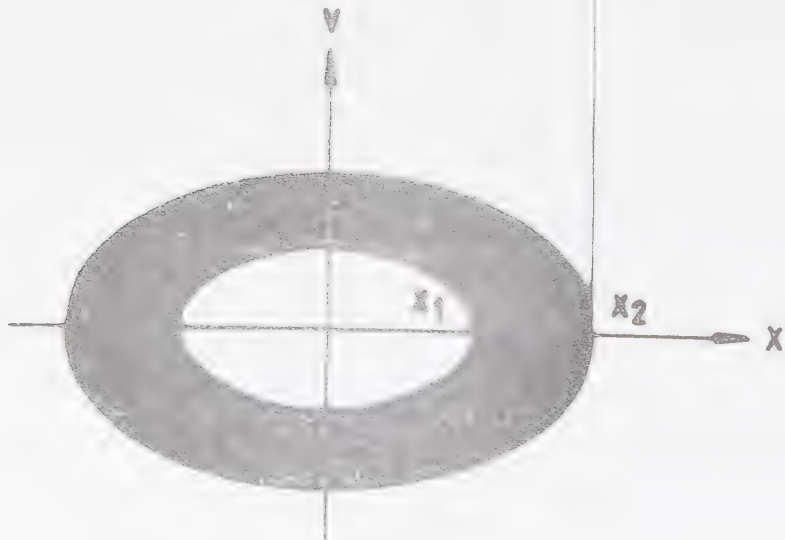


Figure 10c

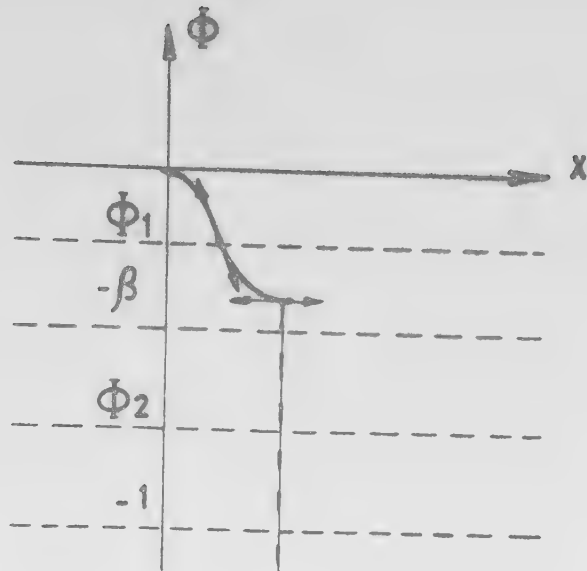


Figure 11a

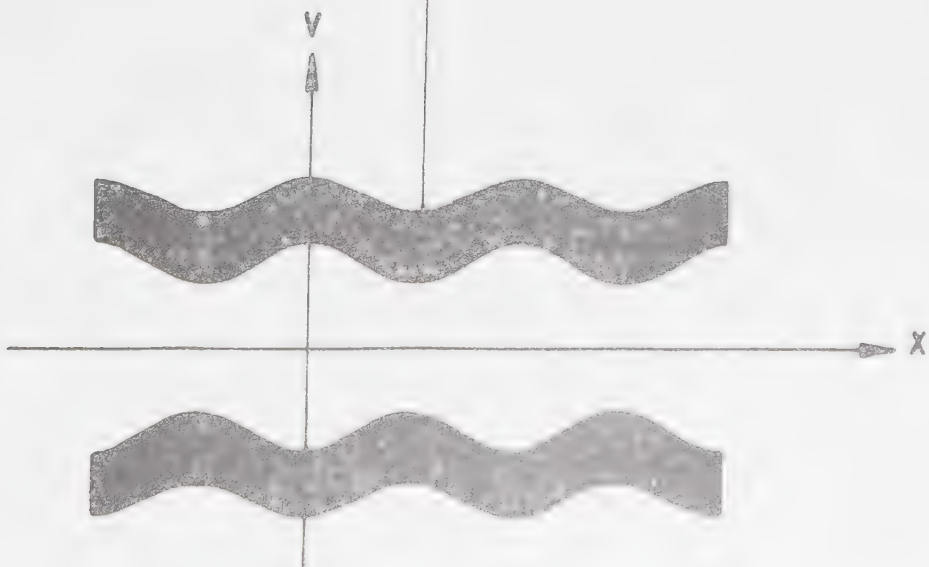


Figure 11b

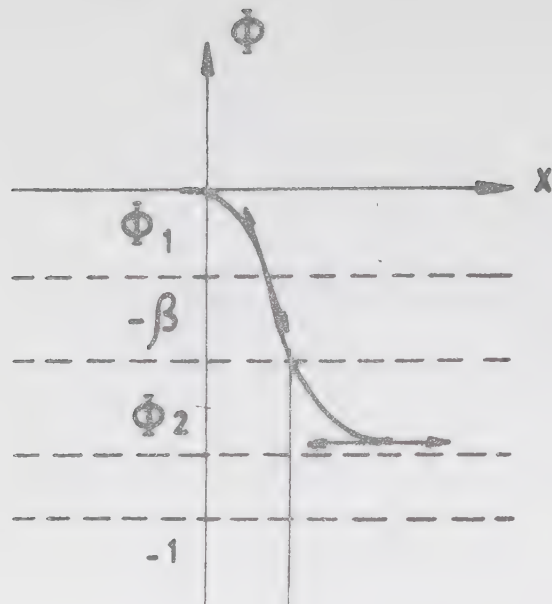


Figure 12a

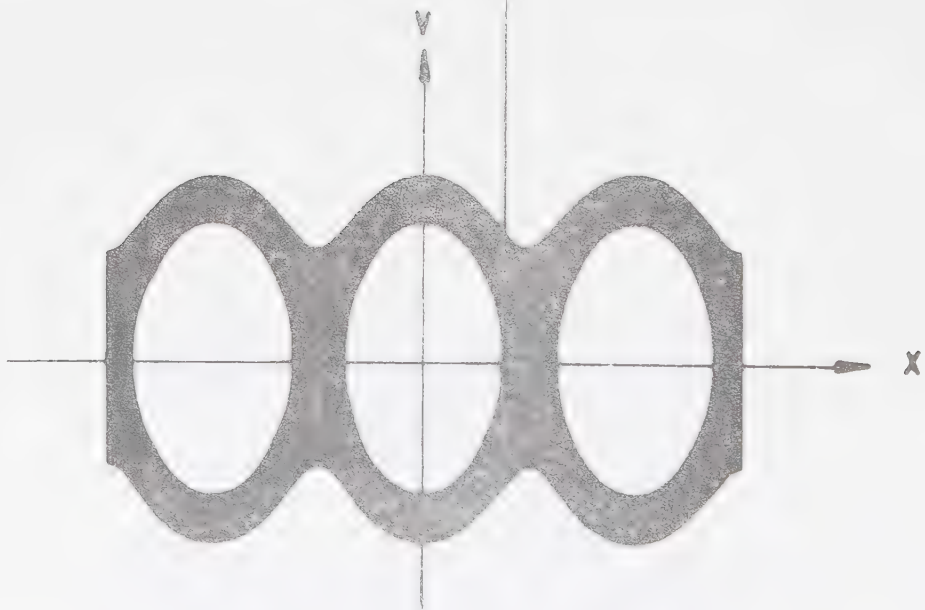


Figure 12b

le potentiel ϕ est compris entre ϕ_1 et ϕ_2 .

Si on pose $H(\phi) = \left(\phi'(x)\right)^2$, pour que $H(\phi)$ s'annule pour $\phi_2 \leq \phi \leq \phi_1$ il faut que $H(\phi_2)$ soit négatif (dans ce cas la valeur $\phi = \phi_2$ ne pourra évidemment pas être atteinte). Si au contraire $H(\phi_2) > 0$ alors la courbe $\phi(x)$ a 2 points d'inflexion qui peuvent être atteints et les solutions sont de nouveau apériodiques c'est-à-dire du type 3. (Fig 10b et 10c)

Si $H(\phi_2) \leq 0$ les solutions sont périodiques, mais nous pouvons encore distinguer 2 types de solutions :

+ Si $H(-\beta) < 0$, le champ électrique s'annule avant que le potentiel ait pu atteindre la valeur $-\beta$, c'est-à-dire avant que le 1^{er} contour ait pu se refermer. Dans ce cas les 2 contours sont ouverts, ce sont les solutions du type 1 (Fig 11)

+ Si $H(-\beta) > 0$, le potentiel ϕ passe par la valeur $-\beta$ avant que le champ ne s'annule, et si la condition $H(\phi_2) \leq 0$ est vérifiée le champ s'annule pour une valeur de ϕ comprise entre ϕ_2 et ϕ_1 , le système est périodique mais le contour intérieur est constitué par une série périodique de courbes fermées, ce sont les solutions du type 2 (Fig 12).

Cette discussion est récapitulée dans le tableau suivant

$G(-\beta) \geq 0$ 2 points d'inflexion pour $\phi < 0$		$G(-\beta) < 0$ pas de point d'inflexion pour $\phi < 0$	
$H(\phi_2) \leq 0$ le champ peut s'annuler		$H(\phi_2) > 0$ le champ ne s'annule pas	
$H(-\beta) < 0$ solutions du type 1	$H(-\beta) \geq 0$ solutions du type 2	solutions du type 3	
solutions périodiques		solutions apériodiques	

Les conditions citées précédemment peuvent s'exprimer en fonction de α, β, γ :

$$G(-\beta) \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} 0 \iff \alpha \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \frac{\gamma - (1-\beta)^{1/2}}{\gamma\beta^{1/2}}$$

$$H(\phi_2) \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0 \iff \gamma^3 (1-\alpha\beta^{1/2})^3 + 2(1-\alpha\beta^{3/2}) - 3\gamma(1-\alpha\beta^{1/2}) \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0 \quad (18)$$

$$H(-\beta) \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0 \iff \alpha \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \frac{1-3/2\alpha\beta - (1-\beta)^{3/2}}{\beta^{3/2}(1-3/2\gamma)}$$

Les solutions du type 1 et du type 2 sont des solutions périodiques, ce sont des ondes stationnaires non linéaires du type B.G.K (BERNSTEIN et al /3/). Par contre les solutions du type 3 sont apériodiques : tous les électrons sont piégés. Ces équilibres sont identiques aux équilibres des systèmes stellaires où toutes les particules sont également piégées, les trajectoires de l'espace des phases étant toutes fermées. Ces équilibres correspondent également à des modèles unidimensionnels de charge d'espace dans les accélérateurs. En effet, le "background" d'ions donne une force de rappel proportionnelle à la distance qui est justement le modèle utilisé pour représenter les forces focalisatrices.

Sur les figures 13 nous avons mis en évidence les régions 1,2,3 (correspondant aux solutions de type 1,2,3) dans l'espace (α, β) pour différentes valeurs de γ .

Les régions 1 et 2 sont limitées par la courbe d'équation

$$\alpha = \frac{1-3/2\gamma\beta - (1-\beta)^{3/2}}{\beta^{3/2}(1-3/2\gamma)}$$

les régions 2 et 3 sont limitées par

$$\gamma^3(1-\alpha\beta^{1/2})^3 + 2(1-\alpha\beta^{3/2}) - 3\gamma(1-\alpha\beta^{1/2}) = 0 \quad (19)$$

Ces 2 équations sont vérifiées pour $\alpha = 1, \beta = 1$ pour toutes les valeurs de γ . De plus, pour $1 < \gamma < 2$ et pour $\alpha = 1$ on peut trouver une deuxième valeur de β (différente de 1) vérifiant ces équations. Pour $\gamma \geq 2$ ces équations ne sont vérifiées que pour $\alpha = 1$ et $\beta = 1$. Cela signifie que les régions 1 et 2 disparaissent pour $\gamma \geq 2$, il ne reste que les solutions apériodiques du type 3 (20)

le potentiel ϕ est compris entre ϕ_1 et ϕ_2 .

Si on pose $H(\phi) = \left[\phi'(x) \right]^2$, pour que $H(\phi)$ s'annule pour $\phi_2 \leq \phi \leq \phi_1$ il faut que $H(\phi_2)$ soit négatif (dans ce cas la valeur $\phi = \phi_2$ ne pourra évidemment pas être atteinte). Si au contraire $H(\phi_2) > 0$ alors la courbe $\phi(x)$ a 2 points d'inflexion qui peuvent être atteints et les solutions sont de nouveau apériodiques c'est-à-dire du type 3. (Fig 10b et 10c)

Si $H(\phi_2) \leq 0$ les solutions sont périodiques, mais nous pouvons encore distinguer 2 types de solutions :

+ Si $H(-\beta) < 0$, le champ électrique s'annule avant que le potentiel ait pu atteindre la valeur $-\beta$, c'est-à-dire avant que le 1^{er} contour ait pu se refermer. Dans ce cas les 2 contours sont ouverts, ce sont les solutions du type 1 (Fig 11)

+ Si $H(-\beta) \geq 0$, le potentiel ϕ passe par la valeur $-\beta$ avant que le champ ne s'annule, et si la condition $H(\phi_2) \leq 0$ est vérifiée le champ s'annule pour une valeur de ϕ comprise entre ϕ_2 et ϕ_1 , le système est périodique mais le contour intérieur est constitué par une série périodique de courbes fermées, ce sont les solutions du type 2 (Fig 12).

Cette discussion est récapitulée dans le tableau suivant

$G(-\beta) \geq 0$ 2 points d'inflexion pour $\phi < 0$		$G(-\beta) < 0$ pas de point d'inflexion pour $\phi < 0$	
$H(\phi_2) \leq 0$ le champ peut s'annuler		$H(\phi_2) > 0$ le champ ne s'annule pas	
$H(-\beta) < 0$ solutions du type 1	$H(-\beta) \geq 0$ solutions du type 2	solutions du type 3	
solutions périodiques		solutions apériodiques	

Les conditions citées précédemment peuvent s'exprimer en fonction de α, β, γ :

$$G(-\beta) \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} 0 \iff \alpha \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \frac{\gamma - (1-\beta)^{1/2}}{\gamma\beta^{1/2}}$$

$$H(\phi_2) \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0 \iff \gamma^3 (1-\alpha\beta^{1/2})^3 + 2(1-\alpha\beta^{3/2}) - 3\gamma(1-\alpha\beta^{1/2}) \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0 \quad (18)$$

$$H(-\beta) \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0 \iff \alpha \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \frac{1-3/2\alpha\beta - (1-\beta)^{3/2}}{\beta^{3/2}(1-3/2\gamma)}$$

Les solutions du type 1 et du type 2 sont des solutions périodiques, ce sont des ondes stationnaires non linéaires du type B.G.K (BERNSTEIN et al /3/). Par contre les solutions du type 3 sont apériodiques : tous les électrons sont piégés. Ces équilibres sont identiques aux équilibres des systèmes stellaires où toutes les particules sont également piégées, les trajectoires de l'espace des phases étant toutes fermées. Ces équilibres correspondent également à des modèles unidimensionnels de charge d'espace dans les accélérateurs. En effet, le "background" d'ions donne une force de rappel proportionnelle à la distance qui est justement le modèle utilisé pour représenter les forces focalisatrices.

Sur les figures 13 nous avons mis en évidence les régions 1,2,3 (correspondant aux solutions de type 1,2,3) dans l'espace (α, β) pour différentes valeurs de γ .

Les régions 1 et 2 sont limitées par la courbe d'équation

$$\alpha = \frac{1-3/2\gamma\beta - (1-\beta)^{3/2}}{\beta^{3/2}(1-3/2\gamma)}$$

(19)

les régions 2 et 3 sont limitées par

$$\gamma^3(1-\alpha\beta^{1/2})^3 + 2(1-\alpha\beta^{3/2}) - 3\gamma(1-\alpha\beta^{1/2}) = 0$$

(20)

Ces 2 équations sont vérifiées pour $\alpha = 1, \beta = 1$ pour toutes les valeurs de γ . De plus, pour $1 < \gamma < 2$ et pour $\alpha = 1$ on peut trouver une deuxième valeur de β (différente de 1) vérifiant ces équations. Pour $\gamma \geq 2$ ces équations ne sont vérifiées que pour $\alpha = 1$ et $\beta = 1$. Cela signifie que les régions 1 et 2 disparaissent pour $\gamma \geq 2$, il ne reste que les solutions apériodiques du type 3.

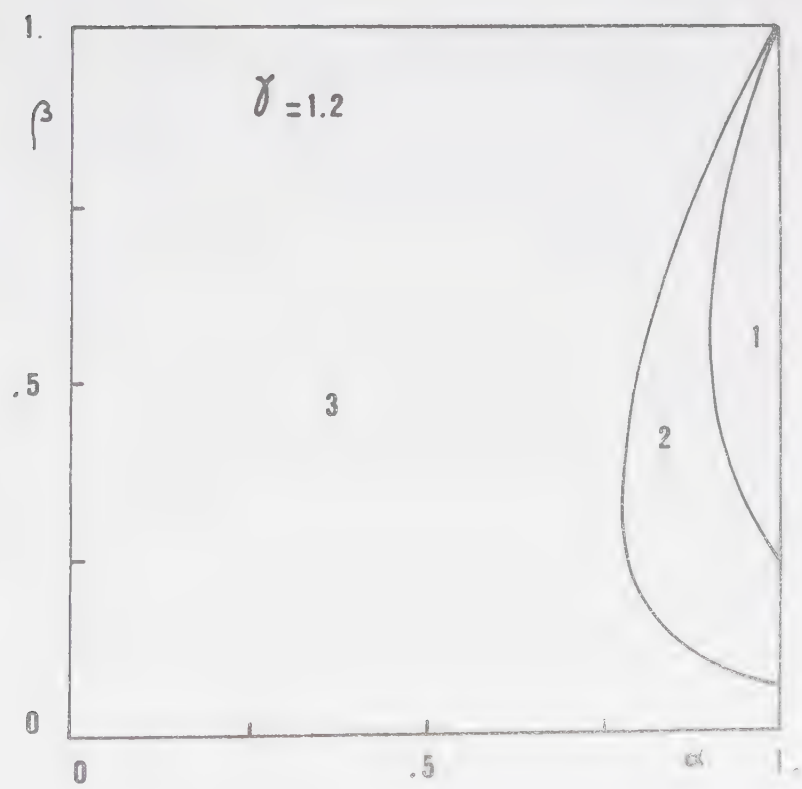
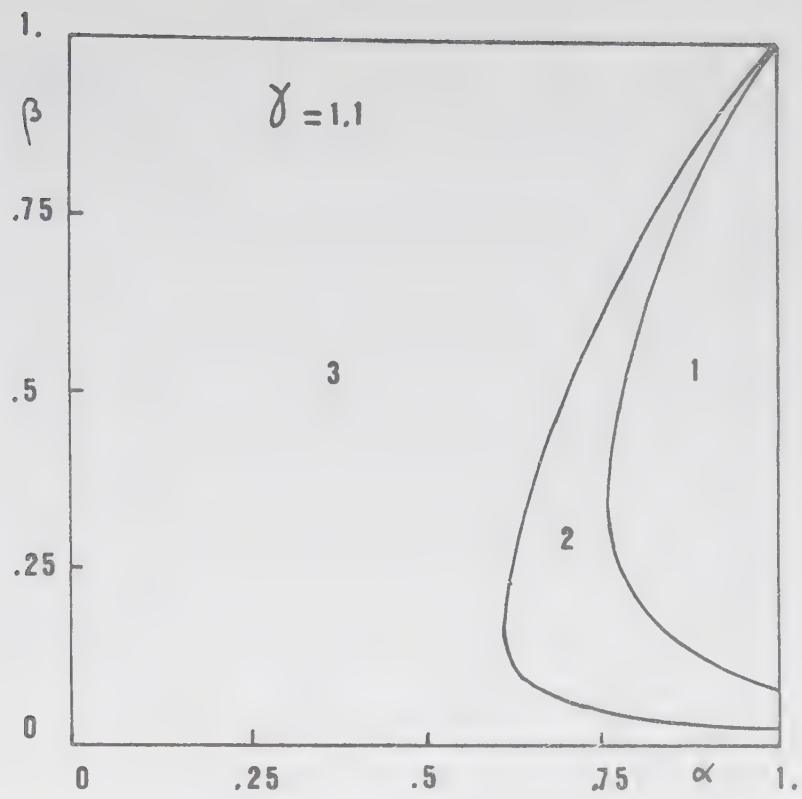
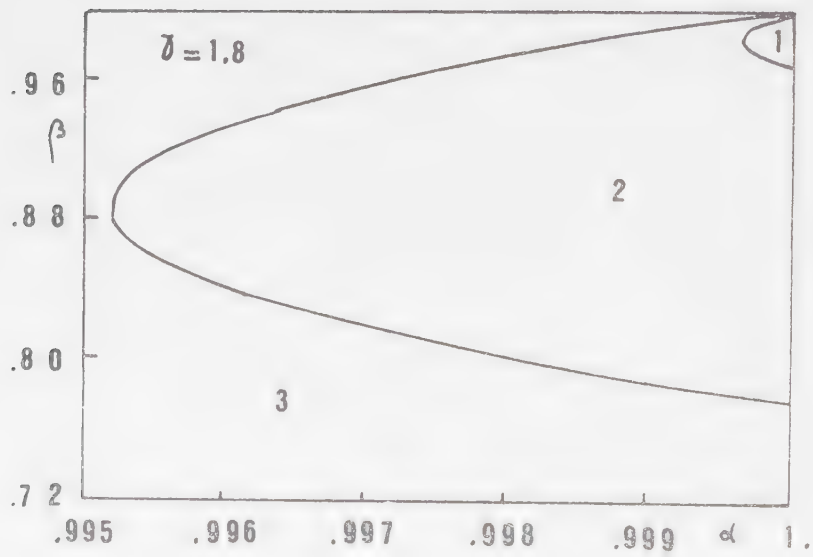
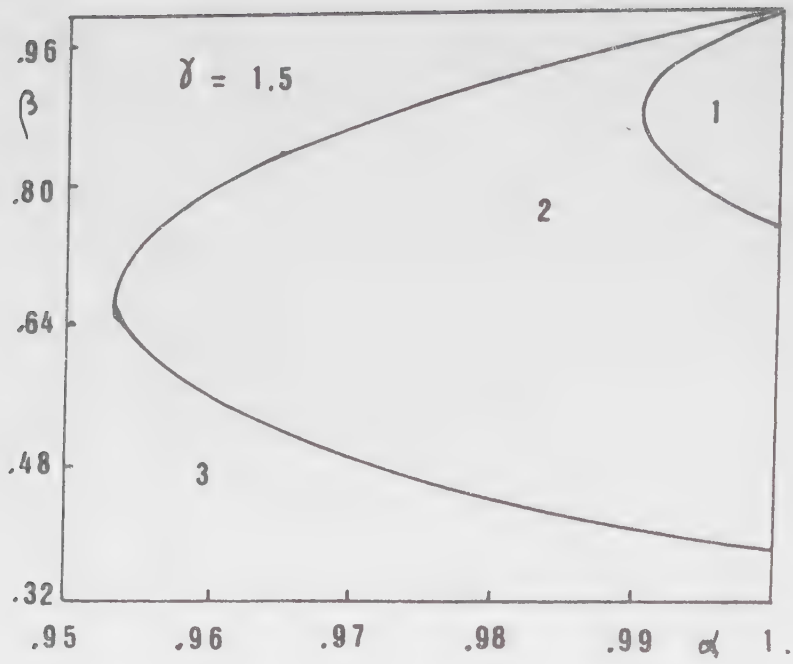


Figure 13



B) EXPERIENCES NUMERIQUES :

Dans ce paragraphe nous allons rappeler quelques expériences numériques réalisées en Dynamique Stellaire et en Plasmas pour les systèmes unidimensionnels plans présentant un intérêt pour les études de stabilité.

1) Systèmes stellaires : Pour les systèmes stellaires unidimensionnels malheureusement très peu de simulations numériques ont été réalisées dans le but d'étudier la stabilité des équilibres. Quelques expériences ont été réalisées par HOHL et FEIX /28/ dans le but d'étudier la stabilité d'un modèle double Water-Bag. Ces expériences ont été réalisées pour $\alpha = 1$, pour $\beta = .25$ et $\beta = .4$. Ces 2 cas sont instables comme le montrent les figures 14 et 15.

Plus récemment, GOLDSTEIN /51/ a étudié analytiquement la stabilité d'un système dont la fonction de distribution est de la forme $F^{(0)}(\epsilon) = A/(\epsilon_0 - \epsilon)^{1/2}$. Ce système présente la particularité d'avoir une densité $\rho^{(0)}(x)$ constante. GOLDSTEIN a montré que les modes symétriques sont stables, et d'autre part il a mis en évidence la stabilité de ce système par une simulation numérique.

De nombreuses expériences numériques ont été réalisées en Dynamique Stellaire dans le but de tester la statistique de LYNDEN-BELL. C'est le cas notamment des expériences faites par LECAR, COHEN, CUPERMAN, HARTEN. (/55/) Les simulations ont été réalisées à partir d'états initiaux qui ne sont pas des états stationnaires et mettent en jeu des phénomènes nonlinéaires complexes. Il faut même noter que la statistique de LYNDEN-BELL implique un mélange énergétique de l'espace des phases.

2) Plasmas : En plasmas la situation est différente, nous disposons d'un plus grand nombre d'expériences numériques fournissant aussi un bon support pour les études théoriques. En particulier depuis que BERNSTEIN, GREENE et KRUSKAL ont montré l'existence d'ondes électrostatiques non linéaires, beaucoup d'expériences ont été réalisées en vue de tester la stabilité et l'existence de telles ondes.

ROBERTS et BERK /17/ ont étudié l'évolution d'un système formé initialement par un double faisceau instable. Ils ont pris des conditions aux limites périodiques sur une longueur L et ont perturbé l'état initial. Après quelques centaines de périodes, le système tend vers un état formé par une onde stationnaire non linéaire du type B.G.K, c'est-à-dire vers un état

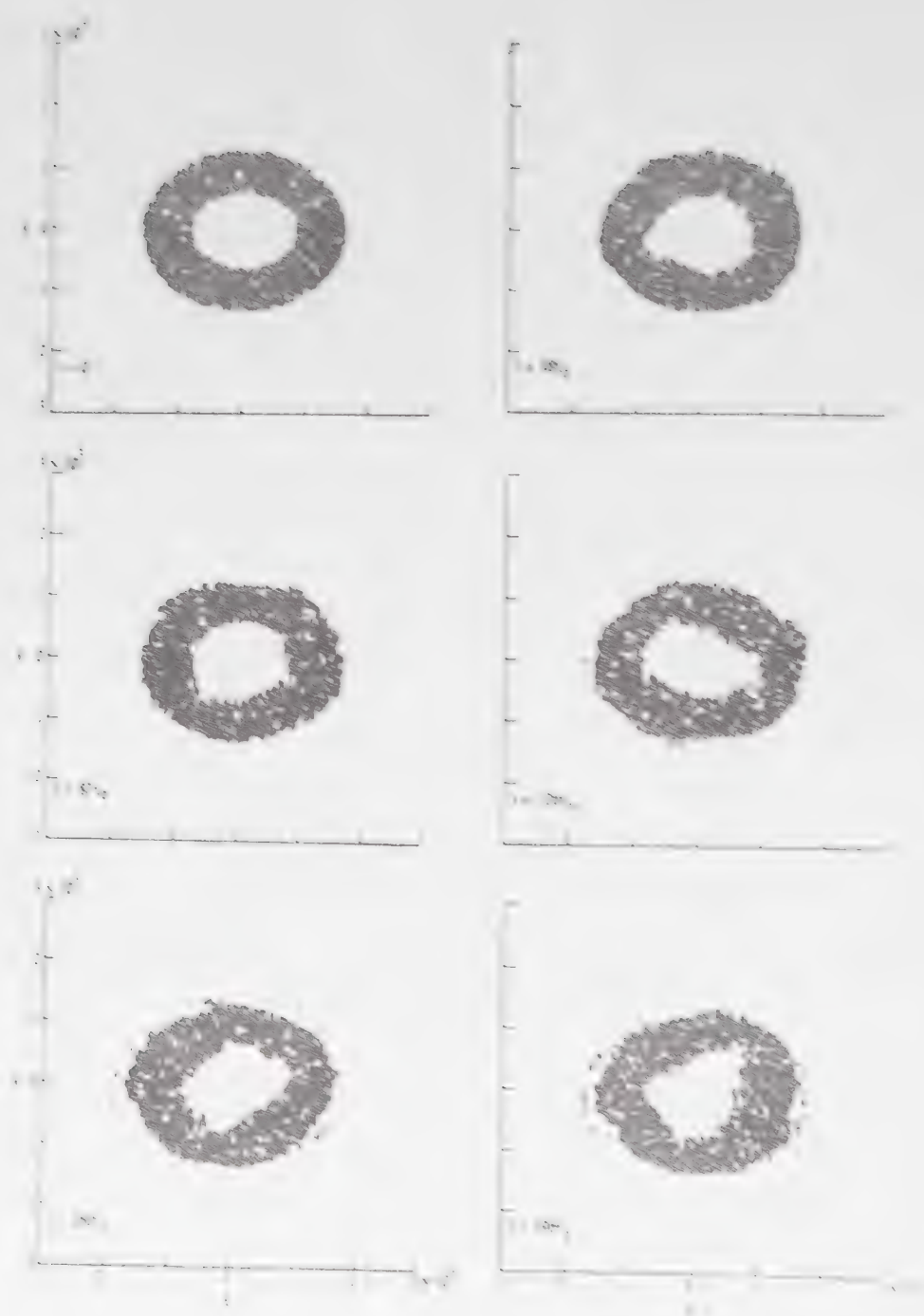


Figure 14:

Evolution tempore d'une masse des phases d'un système
isolé dans un double "Sector-8" (10⁴, 540, 25)

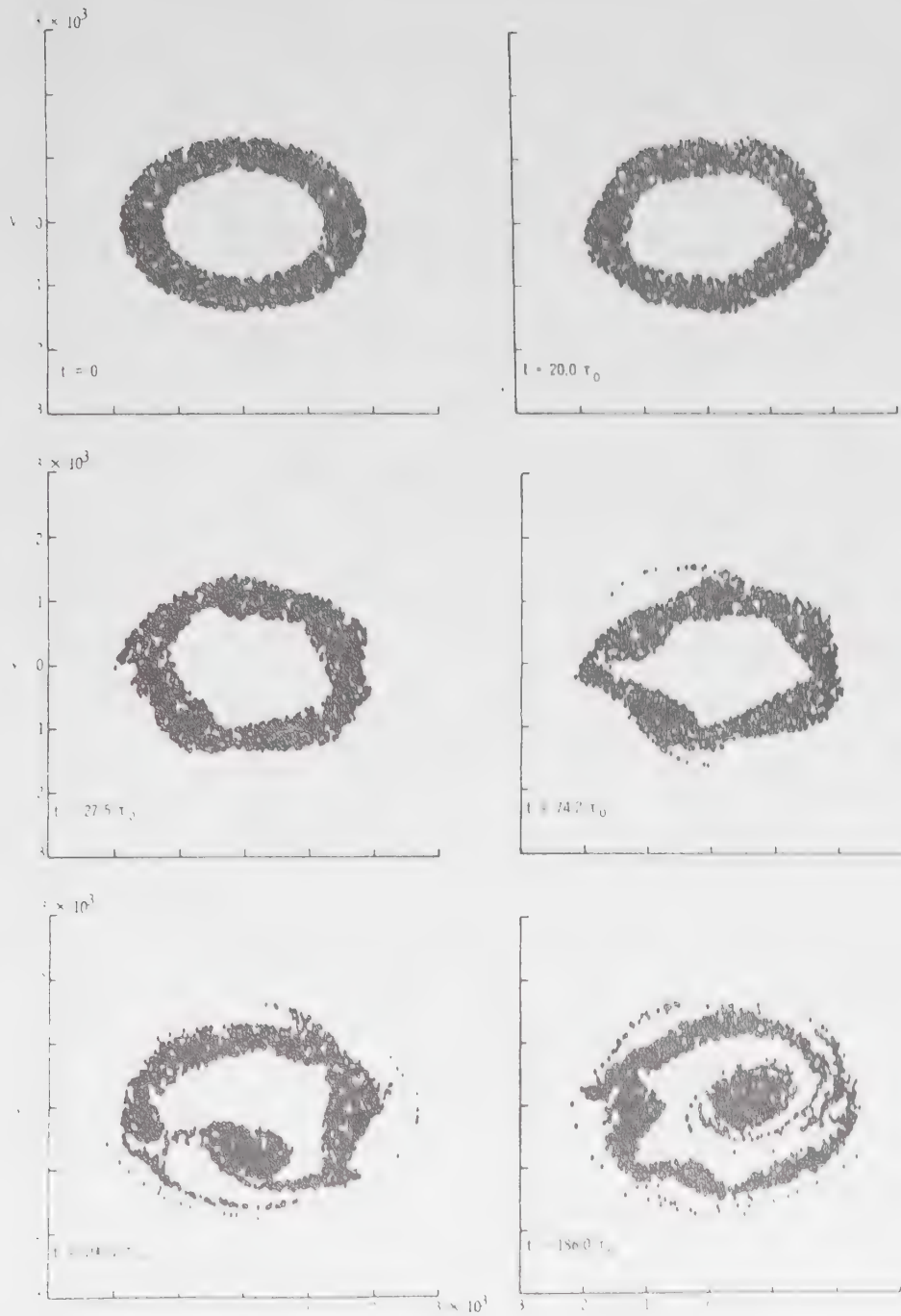


Figure 15:

Evolution dans l'espace des phases d'un système stellaire du type double "Water-Bag" ($\alpha=1, \beta=0.4$)

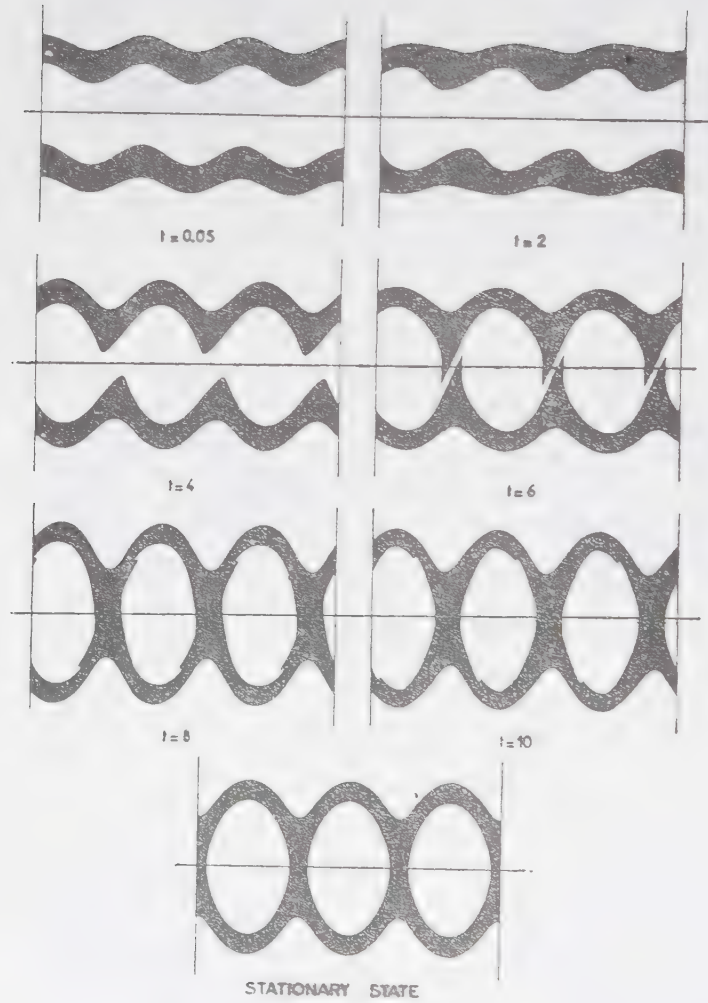


Figure 16:

Evolution d'un "Water-Bag" double faisceau vers un état stationnaire du type B.G.K.

périodique du type 2. Toutefois cet état ne semble pas être totalement stable : les trous se recombinent pour ne rester qu'en petit nombre. ROBERTS et BERK ont d'ailleurs montré qu'un système formé de 2 trous est instable : les 2 trous s'attirent mutuellement pour ne plus en former qu'un seul. Cette simulation a également été réalisée par MORSE et NIELSON /56/ qui ont abouti au même résultat. Cette expérience fait apparaître assez clairement l'apparition puis la destruction lente de l'onde B.G.K.

U. FINZI /57/ a étudié de façon précise la correspondance entre l'état B.G.K. final et l'état double faisceau initial, c'est-à-dire le problème de l'accessibilité des ondes B.G.K.

Etant donné un état initial uniforme du type "Water-Bag" double faisceau ayant les mêmes constantes $(\alpha, M_1, M_2, E_{\text{tot}})$ qu'un état périodique stationnaire ; FINZI a montré que si l'on applique à l'état initial une perturbation non linéaire (de longueur d'onde égale à celle du système final théorique) le système évolue vers l'état périodique du type B.G.K ; l'équilibre est pratiquement atteint au bout de quelques périodes comme le montre la figure 16.

Le problème qui se pose alors est celui de la stabilité de ces ondes. Tout d'abord, si l'on considère des perturbations portant sur plusieurs périodes les expériences numériques montrent que le système est instable, les trous de l'espace des phases (pour des équilibres du type 2) s'attirent et se recombinent.

Par contre si l'on considère des perturbations périodiques portant sur une période de l'équilibre la situation est moins claire. Dans certains cas il semble qu'il y ait instabilité, le processus étant cependant lent. Selon ROBERTS et BERK /17/ certains de ces systèmes pourraient être stables.

De nombreuses expériences, ont été réalisées (à la fois sur machines à plasmas et par simulation sur ordinateurs) afin d'étudier le comportement d'ondes de grande amplitude /58/. Dans ces expériences, un plasma initialement chaud généralement homogène est perturbé par une onde électrique de grande amplitude. Il en résulte qu'un certain nombre d'électrons sont piégés dans les creux du potentiel électrique, ils oscillent entre 2 limites, le mouvement moyen s'effectuant à la vitesse de phase de l'onde. Si on désigne par ω_B la fréquence d'oscillation des particules piégées, les expériences montrent que les ondes électrostatiques de fréquence ω et de nombre d'onde k c'est à dire de fréquence

$$\Omega = \omega - \frac{k}{k_0} \omega_{ci}$$

(ω_0 et k_0 représentent la fréquence et le nombre d'onde de l'onde appliquée initialement) dans le référentiel associé à l'onde initiale sont instables si $\Omega^2 = (2n + 1) \omega_B^2$ ce type d'instabilités appelés "side bands instabilities" a été largement étudié théoriquement, de nombreuses théories rendent compte de ces instabilités /59/.

On peut remarquer qu'il s'agit là d'un problème voisin mais cependant différent de notre problème.

L'état initial perturbé est différent. De plus la structure de l'onde B.G.K finale est différente. L'analyse de la stabilité de ces ondes fait intervenir des résonances entre les particules piégées et les électrons du faisceau, alors que dans notre problème nous avons également des interactions du type double-faisceau.

Enfin, nos études sur les configurations fermées n'ont guère d'équivalent en physique des Plasmas mais relèvent plutôt de la physique des accélérateurs.

C) THEORIE LINEARISEE AUTOUR DE L'EQUILIBRE

Nous nous proposons d'étudier la stabilité linéaire des équilibres définis au paragraphe A.

Pour cela nous introduisons des petites perturbations sur les contours V_j . Nous supposons une variation en fonction du temps en $\exp(i\omega t)$ et nous allons établir les équations permettant le calcul des fréquences propres ω .

1) Equations linéarisées : Soient $W_{\pm,j}(x)e^{i\omega t}$ les perturbations sur les contours V_j , nous avons en nous limitant aux termes du 1^{er} ordre :

$$i\omega W_{\pm,j} \pm \frac{d}{dx} (V_j W_{\pm,j}) = \frac{dU^{(1)}}{dx} \quad (21)$$

où $U^{(1)}(x)$ est la perturbation sur le potentiel.

D'autre part l'équation de POISSON devient

$$\frac{d^2 U^{(1)}}{dx^2} = K \sum_j A_j (W_{+,j} - W_{-,j}) \quad (22)$$

La constante K est égale à $-4\pi Gm$ pour un système stellaire et est égale à $+e^2/m\epsilon_0$ pour un plasma. Dans la suite de ce travail nous choisissons des unités telles que $m = 1$, et $4\pi G = 1$ pour un système stellaire, $e^2/m\epsilon_0 = 1$ pour un plasma.

L'équation (22) devient :

$$\frac{d^2 U^{(1)}}{dx^2} = s \sum_j A_j (W_{+,j} - W_{-,j}) \quad (23)$$

où $s = \pm 1$ respectivement pour un plasma et un système stellaire.

Les équations (24) se déduisent du système (21) :

$$i\omega (W_{+,j} - W_{-,j}) + \frac{d}{dx} (V_j (W_{+,j} + W_{-,j})) = 0 \quad (24)$$

En reportant (24) dans l'équation (23) et en intégrant il vient :

$$\frac{dU^{(1)}}{dx} = \frac{-s}{i\omega} \sum_j A_j V_j (W_{+,j} + W_{-,j}) \quad (25)$$

Nous introduisons les potentiels partiels $U_j^{(1)}(x)$ et les champs partiels $E_j^{(1)}(x)$ créés par les particules du "bag" j :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U_j^{(1)}}{dx^2} &= s A_j (W_{+,j} - W_{-,j}) \\ \frac{e}{m} E_j^{(1)} &= \frac{dU_j^{(1)}}{dx} \quad \text{pour un plasma} \\ E_j^{(1)} &= \frac{dU_j^{(1)}}{dx} \quad \text{pour un système stellaire} \end{aligned}$$

Le champ total est bien entendu la somme des champs partiels :

$$E^{(1)}(x) = \sum_j E_j^{(1)}(x)$$

Finalement en combinant les équations (21) et (25) nous obtenons le système d'équations couplées :

$$\begin{aligned} \omega^2 E_j^{(1)} &= s \omega_j^2(x) E^{(1)} - V_j \frac{d}{dx} \left(V_j \frac{dE_j^{(1)}}{dx} \right) \\ E^{(1)} &= \sum_j E_j^{(1)} \end{aligned} \quad (26)$$

$$\text{où } \omega_j^2(x) = 2A_j V_j(x)$$

Ces équations sont valables pour tous les équilibres précédemment cités au paragraphe (A). Ils restent maintenant à préciser les conditions aux limites des perturbations $E_j^{(1)}(x)$.

2) Conditions aux limites :

a) Équilibres apériodiques : Pour les équilibres stellaires et les équilibres du type 3 en plasma les contours se ferment et nous désignons par $\pm a_j$ les points où $V_j = 0$:

$$V_j(\pm a_j) = 0$$

Le calcul que nous reproduisons ici est dû à BLOOMBERG /60/. Soit $x^{(0)}(t)$ la position d'équilibre d'une particule, si l'on appelle $\xi(x^{(0)}, t)$ la perturbation de cette position, à l'instant t la particule se trouvera

$$\text{en } x(t) = x^{(0)}(t) + \xi(x^{(0)}, t) \quad (27)$$

Le champ des vitesses $V(x, t)$ est défini par $V(x, t) = \frac{dx}{dt}$ et

pour une petite perturbation ξ , nous avons en nous limitant au 1^{er} ordre :

$$V(x^{(0)}, t) + \xi \frac{dV^{(0)}}{dx^{(0)}} = \frac{dx^{(0)}}{dt} + \frac{d\xi}{dt} \quad (28)$$

La vitesse $V(x^{(0)}, t)$ peut se décomposer en deux termes :

$$V(x^{(0)}, t) = V^{(0)}(x^{(0)}) + V^{(1)}(x^{(0)}, t) \quad (29)$$

où $V^{(0)}(x^{(0)})$ est la vitesse à l'équilibre et $V^{(1)}$ est la perturbation sur la vitesse au point $x^{(0)}$.

Les équations (29) et (28) se combinent et on obtient :

$$V^{(1)}(x^{(0)}, t) + \xi \frac{dV^{(0)}}{dx^{(0)}} = \frac{d\xi}{dt} \quad (30)$$

L'équation est évidemment valable pour les contours et l'on peut écrire :

$$w_{\pm, j} \pm \xi_{\pm, j} \frac{dV_j}{dx^{(0)}} = \frac{d\xi_{\pm, j}}{dt} \quad (31)$$

D'autre part le champ partiel $E_j^{(1)}$ est donné par :

$$\frac{\partial}{\partial t} E_j^{(1)} = -s A_j V_j (W_{+,j} + W_{-,j}) \quad (32)$$

Soit encore

$$\frac{\partial}{\partial t} E_j^{(1)} = -s A_j V_j \left(\frac{d\xi_{+,j}}{dt} + \frac{d\xi_{-,j}}{dt} + \frac{dV_j}{dx(0)} (\xi_{-,j} - \xi_{+,j}) \right) \quad (33)$$

Aux points terminaux $\pm a_j$, les perturbations ξ_j doivent être continues et l'on doit avoir

$$\left(\xi_{+,j} - \xi_{-,j} \right)_{\pm a_j} = 0$$

Comme de plus nous avons $V_j(\pm a_j) = 0$ alors nécessairement

$$\frac{\partial}{\partial t} E_j^{(1)}(\pm a_j) = 0 \quad \Rightarrow \quad E_j^{(1)}(\pm a_j) = 0 \quad (34)$$

Lorsque x tend vers $+a_j$, le champ $E_j^{(1)}$ tend vers zéro comme la quantité $(x - a_j)^{1/2}$

Ceci a pour conséquence que $\frac{dE^{(1)}}{dx}$ tend vers l'infini comme $\frac{1}{(x - a_j)^{1/2}}$

Ce calcul montre donc la nécessité de prendre $E_j^{(1)}(\pm a_j) = 0$, bien qu'aux points $\pm a_j$ les perturbations $W_{\pm,j}$ soient différentes de zéro, les particules situées au-delà de ces points apportent une contribution au champ d'ordre $3/2$, que nous négligeons puisque nous nous limitons aux termes du 1^{er} ordre. Nous voyons donc que le fait de supposer que la perturbation eulérienne sur le champ soit nulle en $\pm a_j$ n'implique pas que les points terminaux restent fixes, en effet les fonctions $\xi_{\pm,j}$ ne sont pas nulles en $x = \pm a_j$, seule la continuité de ces fonctions en ces points entraîne $E_j^{(1)}(\pm a_j) = 0$

b) Equilibres périodiques : Si l'on considère un plasma périodique de longueur infinie, il suffit de supposer que les perturbations tendent vers zéro à l'infini : $E^{(1)}(\pm\infty) = 0$

On peut aussi découper le système infini en sous-systèmes, chaque sous-système étant formé de $2N + 1$ périodes et ayant une longueur $2L$. Pour l'étude de la stabilité de ces sous-systèmes nous devons prendre des conditions aux limites périodiques :

$$V_{\pm,j}^{(1)}(-L) = V_{\pm,j}^{(1)}(+L)$$

$$U^{(1)}(-L) = U^{(1)}(+L)$$

(pour un sous-système s'étendant de $-L$ à $+L$) Cet ensemble de conditions aux limites est équivalent à

$$E^{(1)}(-L) = E^{(1)}(+L) \quad (35a)$$

$$\frac{d}{dx} E^{(1)}(-L) = \frac{d}{dx} E^{(1)}(+L) \quad (35b)$$

$$U^{(1)}(-L) = U^{(1)}(+L) \quad (35c)$$

D'autre part si l'on considère l'ensemble des conditions aux limites possibles nous avons 4 groupes : 2 groupes pour les modes antisymétriques (notés IAS, II AS) 2 groupes pour les modes symétriques (IIIS, IV S)

$$\begin{aligned} & E^{(1)}(0) = 0 \\ \text{(I AS)} \quad & \frac{dE^{(1)}}{dx}(0) = 1 \\ & E^{(1)}(\pm L) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & E^{(1)}(0) = 0 \\ \text{(II AS)} \quad & \frac{dE^{(1)}}{dx}(0) = 1 \end{aligned}$$

$$\frac{dE^{(1)}}{dx}(\pm L) = 0$$

$$E^{(1)}(0) = 1$$

$$(III\ S) \quad \frac{dE^{(1)}}{dx}(0) = 0$$

$$E^{(1)}(\pm L) = 0$$

$$E^{(1)}(0) = 1$$

$$(IV\ S) \quad \frac{dE^{(1)}}{dx}(0) = 0$$

$$\frac{dE^{(1)}}{dx}(\pm L) = 0$$

Parmi toutes ces conditions aux limites possibles nous ne devons retenir que celles qui sont compatibles avec les conditions de périodicité définies en (35). Ce point de vue est celui généralement adopté dans les expériences numériques ; en fait le problème des conditions aux limites pour les systèmes physiques réels est délicat, en particulier pour les systèmes ne comprenant qu'un petit nombre de périodes. Notre principal souci étant d'essayer d'interpréter les expériences numériques nous ne retiendrons que les conditions aux limites périodiques. Toutefois, nous étudierons la stabilité des systèmes périodiques infinis par la méthode du mode marginal adiabatique. Parmi les 4 groupes de conditions aux limites définies précédemment, éliminons ceux qui ne conviennent pas :

+ les modes antisymétriques du groupe (II AS) qui sont tels que $E^{(1)}(+L) = -E^{(1)}(-L)$ ne sont pas compatibles avec la condition (35a) (sauf bien sûr si $E^{(1)}(\pm L) = 0$ mais dans ce cas on retombe dans le groupe (I AS))

+ les modes symétriques du groupe (III S) ne vérifient pas la condition (35b)

+ Les modes symétriques du groupe (IV S) correspondent à un potentiel $U^{(1)}(x)$ antisymétrique c'est-à-dire tel que

$$U^{(1)}(-L) = - U^{(1)}(+L)$$

Cette condition n'est compatible avec (35c) que si $U^{(1)}(\pm L) = 0$
 Cette dernière équation entraîne évidemment que

$$\int_0^L E^{(1)}(x) dx = 0$$

Cette équation n'est généralement pas vérifiée pour des fonctions $E^{(1)}(x)$ symétriques (sauf pour des modes asymptotiques pour lesquels la charge d'espace peut être négligée).

Seuls les modes antisymétriques du groupe (IAS) satisfont aux conditions (35).

Donc, si l'on considère un plasma périodique de longueur $2L$ formé de $2N + 1$ périodes avec des perturbations périodiques, nous ne devons retenir que les modes antisymétriques tels que $E^{(1)}(\pm L) = 0$

D) METHODE D'ETUDE DE LA STABILITE :

Le système d'équations couplées (26) permet de calculer les fréquences propres ω^2 du système et donc d'en déduire la stabilité ou l'instabilité.

Dans le cas où tous les coefficients A_i sont positifs (soit $dF^{(0)}(\epsilon)/d\epsilon < 0$) il est possible de montrer que les valeurs propres ω^2 sont toutes réelles positives. Par contre, dans le cas où les A_i ne sont pas tous positifs, nous ne pouvons rien dire.

Dans le sous-paragraphe 2 nous présentons une méthode permettant de calculer numériquement les fréquences propres ω^2 , cette méthode sera ensuite appliquée au cas des systèmes stellaires et des plasmas.

Cependant dans le cas particulier des modes marginaux c'est-à-dire $\omega^2 \sim 0$, le système d'équations (26) se réduit à une seule équation et nous pouvons alors développer une méthode particulière d'étude de stabilité. Ce sera l'objet du sous-paragraphe 1.

1) Méthode du mode marginal $\omega^2 = 0$ /61/, /62/ :

a) Principe : Considérons un plasma homogène et infini dont la fonction de distribution est $F^{(0)}(v)$. Les fréquences propres ω et les nombres d'ondes K des perturbations linéaires $E^{(1)}(x, t)$ sont obtenus en résolvant l'é-

quation de dispersion $\epsilon(K, \omega) = 0$

Pour les ondes instables nous avons $\omega = \omega_r + i\omega_i$ avec un taux de croissance $\gamma = -\omega_i$ positif. On peut distinguer 2 cas :

+ les parties réelles ω_r sont différentes de zéro, c'est le cas de l'instabilité "faisceau-plasma".

+ $\omega_r = 0$, ceci se produit pour l'instabilité "double-faisceau".

Pour les systèmes homogènes, la stabilité peut être déduite du critère de PENROSE /63/.

Pour le cas $\omega_r = 0$, le critère est le suivant :

si $k^2 = - \int dF^{(0)} / d\epsilon dv$, le plasma est stable pour $k^2 > 0$, il est instable pour $k^2 < 0$.

De plus, dans cette dernière hypothèse, les nombres d'onde K des modes instables sont compris entre 0 et $K_{\max} = (-k^2)^{1/2}$.

On considère maintenant un plasma homogène mais fini de longueur $2L$. Si $K_{\max} L \gg 1$, le système se comporte comme un milieu infini, par contre si $K_{\max} L \ll 1$, aucune instabilité ne peut s'y développer.

Pour un système inhomogène, $k^2 = \int -dF^{(0)} / d\epsilon dv$ est une fonction de x , qui peut être positive ou négative suivant les valeurs de x , en ces points nous avons respectivement stabilité ou instabilité locale. Le concept de stabilité ou d'instabilité locale doit se comprendre comme étant la contribution locale à la stabilité ou à l'instabilité du système dans sa totalité, le concept de stabilité ou d'instabilité d'un système étant bien sûr un concept global.

Nous supposons que le système considéré devient instable en passant par le point $\omega = 0$.

Ce mode sera appelé mode marginal adiabatique - c'est-à-dire lentement variable - de stabilité.

Pour $\omega^2 = 0$ le système d'équations (26) se simplifie et nous avons

$$s \rho_j E^{(1)} - v_j \frac{d}{dx} \left(v_j \frac{dE_j^{(1)}}{dx} \right) = 0 \quad (36)$$

pour $j = 1, \dots, N$

Ces équations se simplifient par $V_j(x)$ et en intégrant de x_0 à x puis en divisant par $V_j(x)$ nous obtenons :

$$s \frac{2A_j}{V_j} \int_{x_0}^x E_j^{(1)}(x') dx' - \frac{dE_j^{(1)}}{dx} = 0 \quad (37)$$

Nous introduisons les potentiels $\phi_j(x)$:

$$\phi_j(x) = \int_{x_0}^x E_j^{(1)}(x') dx' \quad (38)$$

Le point x_0 est choisi de telle sorte que $dE_j^{(1)}(x_0)/dx = 0$ pour $j = 1, \dots, N$.

Les fonctions $\phi_j(x)$ vérifient le système :

$$s \frac{2A_j}{V_j} \phi_j(x) - \frac{d^2 \phi_j}{dx^2} = 0$$

$$\text{avec } \phi(x) = \sum_{j=1}^N \phi_j(x) \quad (39)$$

En faisant la somme de ces équations pour $j = 1, \dots, N$ nous obtenons l'équation :

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} - sk^2(x) \phi(x) = 0 \quad (40)$$

(pour un multiple Water-Bag la fonction $k^2(x)$ s'écrit

$$k^2(x) = \sum_{j=1}^N \frac{2A_j}{V_j(x)})$$

Les conditions aux limites sont

$$E^{(1)}(\pm L) = \frac{d\phi}{dx}(\pm L) = 0 \text{ pour un système s'étendant de } -L \text{ à } +L.$$

Si l'on considère l'équation de POISSON à l'équilibre on a :

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = -s(p^{(0)} - n_i)$$

soit en dérivant par rapport à x et en supposant que n_1 est indépendant de x ,

$$\frac{d^2 E^{(0)}}{dx^2} - sk^2(x) E^{(0)} = 0 \quad (41)$$

car on a $\frac{d\phi^{(0)}}{dx} = k^2(x) \frac{dU^{(0)}}{dx}$

Aux points $x = \pm L$ les conditions aux limites sont :

$$\begin{aligned} & \text{- pour un système stellaire : } \frac{dE^{(0)}}{dx} = 0 \\ & \text{- pour un plasma : } \frac{dE^{(0)}}{dx} = \rho(\pm L) - n_1 \end{aligned} \quad (42)$$

en particulier pour un système où tous les électrons sont piégés $\frac{dE^{(0)}}{dx} = -n_1$

Les fonctions $\phi(x)$ et $E^{(0)}(x)$ vérifient donc les mêmes équations (40) et (41) mais pour un plasma les conditions aux limites sont différentes. Pour un système stellaire les conditions aux limites sont les mêmes et il y a donc toujours un mode ω^2 qui correspond à $\phi = E^{(0)}$. Ce mode est en fait un mode de déplacement ainsi que nous le verrons au paragraphe E, il correspond à une translation de l'ensemble du système.

Revenons au cas du plasma. L'équation (41) avec les conditions aux limites (42) a évidemment une solution, mais ce n'est généralement pas le cas de l'équation (40) du fait des conditions aux limites différentes. Nous pouvons cependant calculer les valeurs propres λ de l'équation :

$$\left(k^2(x) - \frac{d^2}{dx^2} \right) \psi = \lambda \psi \quad (43)$$

avec $d\psi/dx(\pm L) = 0$

Cette équation peut s'interpréter comme étant l'équation du mode marginal $\omega^2 = 0$ pour un plasma virtuel dont l'équilibre serait caractérisé par $k^2(x) - \lambda$ au lieu de $k^2(x)$.

La fonction $k^2(x)$ représentant la contribution locale à la stabilité

(ou l'instabilité) du système.

Deux cas se distinguent :

+ Toutes les valeurs propres λ sont positives : cela signifie que pour obtenir un mode marginal $\omega^2 = 0$ nous devons "déstabiliser" en tous points le plasma. Nous en concluons que ce système est stable, tout au moins pour les instabilités apparaissant en $\omega_r = 0$

b) Exemple d'application de ce critère : Nous allons tester ce critère sur un modèle particulier de Plasma. (BERTRAND et al /62/) (nous ne donnons ici que les principales étapes de ce travail)

Considérons un double Water-Bag (Fig 17) de densités A_1 et A_2

($A_1 < 0$, $A_2 > 0$) ; pour $-L < x < +L$, les fonctions $V_{\pm,1}^{(0)}(x)$ et $V_{\pm,2}^{(0)}(x)$ limitant les 2 domaines de l'espace des phases sont constantes et valent :

$$V_{\pm,1}^{(0)}(x) = \pm V'_1$$

(44)

$$V_{\pm,2}^{(0)}(x) = \pm V'_2$$

De même pour $x > +L$, $x < -L$

$$V_{\pm,1}^{(0)}(x) = \pm V_1$$

(45)

$$V_{\pm,2}^{(0)}(x) = \pm V_2$$

Les constantes V'_1 et V_1 étant différentes nous devons considérer ce milieu comme inhomogène.

Nous choisissons ces constantes de telle sorte que $k^2(x)$ soit négatif dans la région centrale (qui apparaît donc comme une source possible d'instabilité) et positif dans les régions extérieures.

Cet équilibre peut se réaliser physiquement de la manière suivante : à chaque discontinuité nous plaçons deux grilles infiniment voisines, au point $x = -L$, la grille de gauche est portée au potentiel $+\phi/2$, la grille de droite est portée au potentiel $-\phi/2$ et inversement au point $x = +L$. (Fig 18) Nous supposons toujours que les ions sont immobiles et de densité n_1 uniforme, le système étant neutre électriquement. Cette dernière condition entraîne les 2 relations :

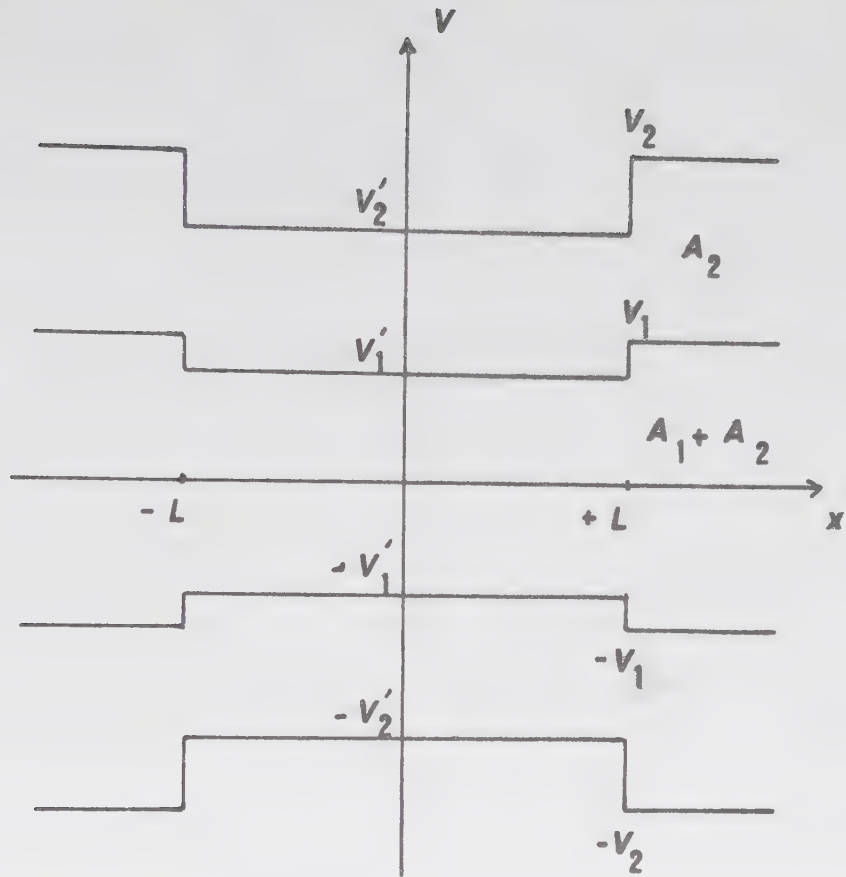


Figure 17

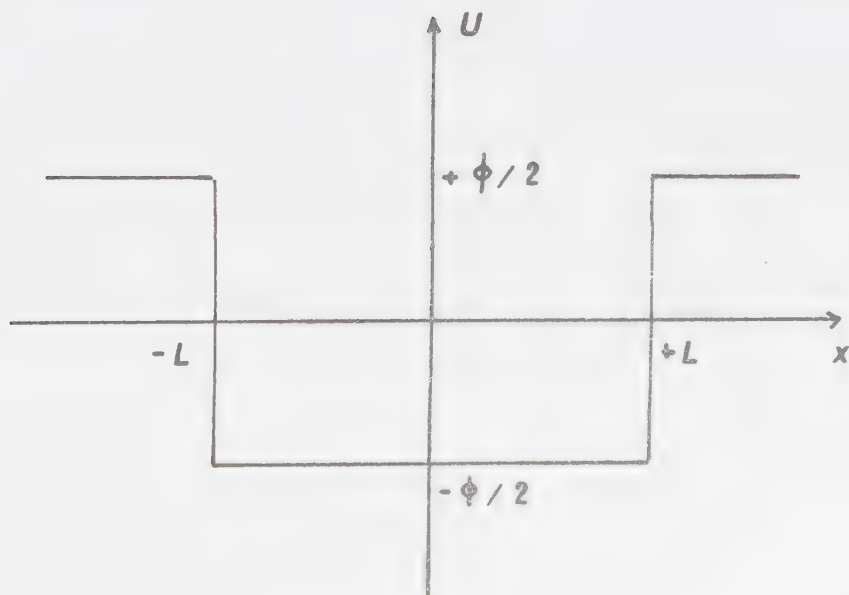


Figure 18

$$n_i = 2(A_1 V_1 + A_2 V_2) = 2(A_1 V_1' + A_2 V_2') \quad (46)$$

D'autre part sur chaque contour l'énergie est conservée :

$$\Phi = \frac{1}{2} (V_1^2 - V_1'^2) = \frac{1}{2} (V_2^2 - V_2'^2) \quad (47)$$

Dans la région intérieure $k^2(x)$ est constant et est égal à :

$$k^2(x) = \frac{2A_1}{V_1'} + \frac{2A_2}{V_2'} = -k_i^2 \quad (48)$$

et dans la région extérieure :

$$k^2(x) = \frac{2A_1}{V_1} + \frac{2A_2}{V_2} = +k_e^2 \quad (49)$$

La résolution de l'équation (43) pour ce cas particulier nous donne :
pour $x < -L$:

$$\psi = A \exp \{ (k_e^2 - \lambda)^{1/2} x \}$$

pour $-L < x < +L$:

$$\psi = B \exp i (k_i^2 + \lambda)^{1/2} x + C \exp - i (k_i^2 + \lambda)^{1/2} x \quad (50)$$

pour $x > +L$

$$\psi = D \exp - (k_e^2 - \lambda)^{1/2} x$$

Les conditions de continuité de ψ et de $d\psi/dx$ aux points $x = \pm L$ entraînent :
(pour une discussion plus précise de ces conditions voir /62/)

Pour les modes symétriques :

$$\operatorname{tg} \left\{ (k_i^2 + \lambda)^{1/2} L \right\} = \left\{ (k_e^2 - \lambda) / (k_i^2 + \lambda) \right\}^{1/2} \quad (51)$$

pour les modes antisymétriques :

$$\operatorname{tg} \left((k_1^2 + \lambda)^{1/2} \right) = \left((k_1^2 + \lambda) / (k_e^2 - \lambda) \right)^{1/2} \quad (52)$$

On peut considérer que les équations (51) et (52) définissent L en fonction de λ , dans chaque cas nous avons $dL/d\lambda < 0$, par conséquent le plasma est instable si L est supérieur à la valeur L_0 obtenue dans le cas $\lambda = 0$:

$$L_0 = \operatorname{Arctg} (K_e/K_1) / K_1 \quad (53)$$

Pour les modes symétriques la longueur limite est égale à L_0 pour les modes antisymétriques la longueur limite est égale à $L_0 + \pi/(2k_1)$. Nous voyons donc que le premier mode d'instabilité à apparaître est un mode symétrique et $2L_0$ est la longueur minimum de la région intérieure permettant le développement de l'instabilité.

Nous avons approximativement $2L_0 \sim \frac{1}{2} l$ où $l = 2\pi/k_1$ est la lon-

gueur d'onde du mode marginal adiabatique dans la région centrale. Remarquons que dès que $2L > l/2$ l'instabilité apparaît quelque soient les propriétés stabilisatrices des zones extérieures. Par contre une instabilité peut apparaître pour des zones intérieures petites si les régions extérieures sont elles mêmes assez proches de l'instabilité ($K_e \ll K_1$).

La résolution numérique du système (26) permet d'obtenir les fréquences propres ω . (BERTRAND et al /62/). Conformément à la théorie du mode marginal, les premiers modes instables apparaissent pour $L > L_0$; de plus, pour le système étudié, il n'y a pas de modes complexes, le passage du régime stable au régime instable se faisant uniquement par le point $\omega = 0$.

2) Méthode de calcul des fréquences propres : Nous exposerons la méthode en nous limitant au cas des systèmes non périodiques.

Le système d'équations (26) peut encore s'écrire :

$$V_i \frac{d}{dx} \left(V_i \frac{dE_i^{(1)}}{dx} \right) + (\omega^2 - s\omega_i^2) E_i^{(1)} = s\omega_i^2 \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^N E_l^{(1)} \quad (54)$$

où la contribution des champs partiels des autres "bags" est isolée au second membre.

Considérons d'abord le système d'équations découplées obtenu en annulant le second membre de (54). Nous désignons par $X_{i\mu}(x)$ les fonctions propres de ces équations et par $\lambda_{i\mu}^2$ les valeurs propres associées :

$$V_i \frac{d}{dx} \left(V_i \frac{dX_{i\mu}}{dx} \right) + \left(\lambda_{i\mu}^2 - s \omega_i^2(x) \right) X_{i\mu} = 0 \quad (55)$$

où l'indice i est le numéro du "bag" considéré, l'indice μ est le rang de la fonction propre et de la valeur propre associée.

Pour un système formé de N "bags" et si l'on prend en considération M valeurs propres pour chaque "bag" on aura :

$$i = 1, \dots, N$$

$$\mu = 1, \dots, M$$

Nous introduisons les fonctions définies par

$$\theta_i(x) = \int_0^x \frac{dx'}{V_i(x')} = \int_0^x \frac{dx'}{(2\epsilon_i + 2U^{(0)}(x'))^{1/2}} \quad (56)$$

et les quantités τ_i

$$\tau_i = \int_0^{a_i} \frac{dx}{(2\epsilon_i + 2U^{(0)}(x))^{1/2}} \quad (57)$$

En utilisant les variables $\theta_i(x)$ les équations (55) s'écrivent plus simplement :

$$\frac{d^2 X_{i\mu}}{d\theta_i^2} + (\lambda_{i\mu}^2 - s \omega_i^2) X_{i\mu} = 0 \quad (58)$$

Les conditions aux limites des fonctions propres $X_{i\mu}$ sont les mêmes que celles des fonctions $E_i^{(1)}$ c'est-à-dire :

$$X_{i\mu}(\theta_i(\pm a_i)) = E_i^{(1)}(\pm a_i) = 0 \quad (59)$$

Avec ces conditions aux limites les fonctions propres $X_{i\mu}$ forment N ensembles de fonctions orthonormales :

$$\int_0^{\tau_i} X_{i\mu} X_{i\nu} d\theta_i = \delta_{\mu\nu} \text{ (où } \delta_{\mu\nu} \text{ est le symbole de KRONECKER)}$$

(on peut séparer les modes symétriques des modes antisymétriques étant donnée la symétrie de l'équilibre, et par conséquent on peut se contenter d'intégrer sur la moitié du système)

Chaque fonction $E_i^{(1)}$ peut alors se développer dans la base formée par les $X_{i\mu}$

$$E_i^{(1)}(x) = \sum_{\mu=1}^M a_{i\mu} X_{i\mu} \left(\theta_i(x) \right) \quad (60)$$

pour $i = 1, \dots, N$

Nous reportons les expressions (60) dans le système (26), en multipliant la $i^{\text{ème}}$ équation par $X_{i\mu}$ puis en intégrant sur x de 0 à $+a_i$ nous obtenons le système

$$(\omega^2 - \lambda_{i\mu}^2) a_{i\mu} - s 2A_i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \sum_{\sigma=1}^M a_{k\sigma} v_{i\mu, k\sigma} = 0 \quad (61)$$

pour $i = 1, \dots, N$

$\mu = 1, \dots, M$

avec

$$v_{i\mu, k\gamma} = \int_0^{a_i} X_{i\mu}(\theta_i(x)) X_{k\gamma}(\theta_k(x)) dx \quad (62)$$

Les valeurs propres ω^2 sont obtenues en écrivant que le déterminant formé à partir des coefficients $a_{i\mu}$ est égal à zéro. En fait, les quantités ω^2 apparaissent comme les valeurs propres de la matrice (M) obtenue de la manière suivante :

la matrice (M) qui est une matrice carrée d'ordre $N.M$ peut se décomposer en N^2 blocs, chaque bloc étant une matrice carrée d'ordre M .

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc}
 & & i^{\text{ème}} \text{ colonne} & \\
 \begin{array}{c} (M) = \end{array} & \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc}
 (B_{11}) & +sA_1(B_{12}) & +sA_1(B_{1i}) & +sA_1(B_{1N}) \\
 +sA_2(B_{21}) & (B_{22}) & & +sA_2(B_{2N}) \\
 & & +sA_j(B_{ji}) & \\
 +sA_N(B_{N1}) & +sA_N(B_{Ni}) & & (B_{NN})
 \end{array} \right] \end{array} & & \begin{array}{c} j^{\text{ème}} \text{ ligne} \\ (j \neq i) \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

Les blocs (B_{ii}) sont des matrices diagonales:

$$(B_{ii}) = \text{Diag}(\lambda_{i1}^2, \dots, \lambda_{i\mu}^2, \dots, \lambda_{iM}^2)$$

Les blocs (B_{ji}) (avec $j \neq i$) sont définis par:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} (B_{ij}) = \end{array} & \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccccc}
 v_{i1,j1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & v_{i1,jM} \\
 \cdot & & & & & & \cdot \\
 \cdot & & & & & & \cdot \\
 \cdot & & & & & & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & v_{i\mu,j\gamma} & \cdot & \cdot \\
 \cdot & & & & & & \cdot \\
 \cdot & & & & & & \cdot \\
 v_{iM,j1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & v_{iM,jM}
 \end{array} \right] \end{array} & \begin{array}{c} \mu^{\text{ème}} \text{ ligne} \end{array}
 \end{array}$$

$\gamma^{\text{ème}} \text{ colonne}$

Nous avons la relation $B_{ij}^t = B_{ji}$ (B_{ij}^t représente la matrice transposée de B_{ij}). Cette propriété vient de ce que nous avons:

$$v_{i\mu,j\gamma} = \int x_{i\mu} x_{j\gamma} dx = v_{j\gamma,i\mu}$$

Nous avons écrit complètement la matrice (M) dans le cas où $N=2, M=3$.

$$(M) = \begin{bmatrix} \lambda_{11}^2 & 0 & 0 & +sA_1 v_{11,21} & +sA_1 v_{11,22} & +sA_1 v_{11,23} \\ 0 & \lambda_{12}^2 & 0 & +sA_1 v_{12,21} & +sA_1 v_{12,22} & +sA_1 v_{12,23} \\ 0 & 0 & \lambda_{13}^2 & +sA_1 v_{13,21} & +sA_1 v_{13,22} & +sA_1 v_{13,23} \\ +sA_2 v_{21,11} & +sA_2 v_{21,12} & +sA_2 v_{21,13} & \lambda_{21}^2 & 0 & 0 \\ +sA_2 v_{22,11} & +sA_2 v_{22,12} & +sA_2 v_{22,13} & 0 & \lambda_{22}^2 & 0 \\ +sA_2 v_{23,11} & +sA_2 v_{23,12} & +sA_2 v_{23,13} & 0 & 0 & \lambda_{23}^2 \end{bmatrix}$$

Les opérations qu'il faut effectuer pour calculer les valeurs propres ω^2 sont donc les suivantes:

1 calculer l'équilibre

2 calculer les fonctions propres des "bags" découplés : $X_{i\mu}$ et les valeurs propres associées $\lambda_{i\mu}^2$

3 calculer les éléments de la matrice (M) c'est-à-dire les produits scalaires $V_{i\mu,j\gamma}$

4 calculer les valeurs propres de la matrice (M) qui sont les fréquences propres ω^2 cherchées.

Cette méthode sera appliquée pour l'étude de la stabilité d'équilibres du type double Water-Bag en Dynamique Stellaire et en Plasmas, et dans le cas d'équilibres du type multiple Water-Bag en Dynamique Stellaire.

E) ETUDE DE LA STABILITE DES SYSTEMES APERIODIQUES /64/, /54/

Parmi les états stationnaires du type double Water-Bag précédemment étudiés en Plasma, les équilibres apériodiques du type 3, c'est-à-dire où tous les électrons sont piégés sont comparables aux équilibres obtenus en Dynamique Stellaire pour le même modèle Double Water-Bag.

Dans les 2 cas, les contours $V_i(x)$ sont donnés par :

$$V_i(x) = 2 \left\{ \epsilon_i + U^{(0)}(x) \right\}^{1/2}$$

et le potentiel $U^{(0)}(x)$ est donné par l'équation de POISSON :

$$\frac{d^2 U^{(0)}}{dx^2} = s \left(2A_1 V_1(x) + 2A_2 V_2(x) - n_1 \right) \quad (63)$$

où pour un système stellaire $s = -1$ et $n_1 = 0$, pour un plasma : $s = +1$ et n_1 représente la densité constante des ions (ceci en choisissant des unités telles que : $m = 1$ et $e^2/mc_0 = 1$ en Plasmas, $4\pi G = 1$ en Dynamique Stellaire)

De même les équations linéarisées autour de l'équilibre sont :

$$\omega^2 E_i^{(1)} = s \omega_i^2 E_i^{(1)} - V_i \frac{d}{dx} \left(V_i \frac{d E_i^{(1)}}{dx} \right) \quad (64)$$

$$\text{avec } E^{(1)} = E_1^{(1)} + E_2^{(1)}$$

et les conditions aux limites $E_i^{(1)}(\pm a_i) = 0$

Dans les 2 cas le problème de l'étude de la stabilité linéaire des équilibres se présente donc de la même manière. Dans ce paragraphe nous étudierons donc simultanément la stabilité de ces 2 familles d'équilibres.

1) Existence de modes particuliers : Le système (64) admet les solutions particulières

$$E_i^{(1)} = k A_i V_i(x) \quad (65)$$

où k est une constante. Nous avons en effet :

$$\begin{aligned} V_i \frac{d E_i^{(1)}}{dx} &= k A_i \frac{d U^{(0)}}{dx} \\ V_i \frac{d}{dx} \left(V_i \frac{d E_i^{(1)}}{dx} \right) &= k A_i V_i \frac{d^2 U^{(0)}}{dx^2} \\ &= s k A_i V_i (\rho_1 + \rho_2 - n_i) \end{aligned} \quad (66)$$

soit $\omega^2 = n_i$, c'est-à-dire que pour un système stellaire la valeur propre ω^2 correspondante est nulle, dans le cas d'un plasma $\omega^2 = n_i$.

Ces modes sont en réalité des modes de déplacement : si à chaque particule on fait subir un déplacement infinitésimal δ :

$$x \longrightarrow x + \delta$$

$$\text{on a } U_i^{(1)}(x) = \frac{d U_i^{(0)}}{dx} \delta$$

où les champs partiels $d U_i^{(0)}/dx$ sont donnés par $\frac{d^2 U_i^{(0)}}{dx^2} = \delta_i^{(0)}$

Finalement on a :

$$E_i^{(1)}(x) = \delta_i^{(0)}(x) \delta = 2 A_i V_i(x) \delta \quad (67)$$

qui sont les solutions (65) correspondant à $\omega^2 = n_i$.

Dans le cas d'un système stellaire, les équations du mouvement sont valables dans tout repère en translation uniforme, le mode $\omega^2 = 0$ qui existe donc toujours est une simple translation du système, et ne correspond donc

à aucun phénomène intéressant. Nous verrons justement par la suite que le mode marginal $\omega^2 = 0$ ne joue aucun rôle dans les études de stabilité des systèmes stellaires.

Pour les plasmas, la situation est différente, les ions restent fixes; ils exercent une force de rappel sur les électrons provoquant ainsi un mouvement oscillatoire de l'ensemble des électrons à la fréquence $\omega^2 = n_i$

Remarque: Si nous considérons l'équation du mode marginal adiabatique $\omega^2 = 0$

$$-\frac{d^2\Phi}{dx^2} + sk^2(x)\Phi = \lambda\Phi \quad (67)$$

$$\text{avec } d\Phi/dx(\pm L) = 0$$

Nous pouvons écrire la fonction inconnue Φ (que nous prenons égale à zéro en $x=0$) sous la forme $\Phi = \alpha E^{(0)}$

La fonction $E^{(0)}$ ne s'annule qu'au point $x=0$, la fonction $\alpha(x)$ est donc totalement arbitraire, les seules contraintes imposées étant dues aux conditions aux limites

En multipliant l'équation (67) par Φ et en intégrant sur x nous avons

$$\lambda \int \Phi^2 dx = s \int k^2(x) \Phi^2 dx + \int \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^2 dx \quad (68)$$

Il est facile de voir qu'en remplaçant Φ par $\Phi = \alpha E^{(0)}$ dans cette équation on obtient :

$$\lambda \int \Phi^2 dx = \int \left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2 E^{(0)2} dx - \left(\alpha \frac{d\alpha}{dx} E^{(0)2} \right)_{-L}^{+L} \quad (69)$$

Si l'on tient compte des conditions aux limites de $d\Phi/dx$ ce dernier terme s'écrit:

$$- \left(\alpha \frac{d\alpha}{dx} E^{(0)2} \right)_{-L}^{+L} = \left(\alpha^2 E^{(0)} \frac{dE^{(0)}}{dx} \right)_{-L}^{+L}$$

Cette quantité est nulle pour un système stellaire, elle est positive pour un plasma apériodique. Nous en déduisons que λ est toujours positif. De plus pour un système stellaire la solution $\Phi = \alpha E^{(0)}$ avec $\alpha = \text{constante}$ convient et correspond au mode de déplacement; la première valeur propre λ est nulle, toutes les autres sont positives. Pour un plasma toutes les valeurs propres λ sont positives. Pour ces deux systèmes apériodiques il n'y aura donc pas de modes $\omega^2 < 0$ (fréquences ω imaginaires pures). Cela bien sûr ne signifie pas que les systèmes seront tou-

jours stables mais que les instabilités n'apparaîtront pas au point $\omega = 0$, mais avec une partie réelle de la fréquence non nulle.

2) Calcul des fréquences ω , discussion sur la stabilité :

a) Analyse commune aux systèmes stellaires et aux plasmas : Pour le calcul des fréquences propres ω^2 nous avons utilisé la méthode présentée au paragraphe D2. Les détails concernant le calcul des équilibres et de leur stabilité sont donnés en Annexe.

Les équilibres étant symétriques, les fonctions propres $E_i^{(1)}(x)$ peuvent se diviser en deux classes : les fonctions symétriques et les fonctions antisymétriques. Nous prenons M modes propres symétriques (ou antisymétriques) pour chaque équation découplée. Nous avons donc 2M fonctions propres symétriques (ou antisymétriques) $X_{i\mu}$ et 2M valeurs propres $\lambda_{i\mu}^2$ associées pour le système total. Les valeurs propres ω^2 sont donc également au nombre de 2M dans chaque cas (symétrique ou antisymétrique). Le tableau suivant donne les valeurs $\lambda_{i\mu}^2$ et des ω^2 dans le cas des modes symétriques (pour un plasma avec $\alpha = 0,6$, $\beta = 0,5$, $\gamma = 1,5$)

	λ_{11}^2	λ_{21}^2	λ_{12}^2	λ_{22}^2	λ_{13}^2	λ_{23}^2	λ_{14}^2	λ_{24}^2	λ_{15}^2	λ_{25}^2
	-.0827	1.3106	2.7109	3.8330	8.1060	9.2597	16.1916	17.4194	26.9713	28.3040
M										
nombre de modes retenus.	ω_{11}^2	ω_{21}^2	ω_{12}^2	ω_{22}^2	ω_{13}^2	ω_{23}^2	ω_{14}^2	ω_{24}^2	ω_{15}^2	ω_{25}^2
2	.26847	.99503	2.7829	3.7254						
3	.26918	.99485	2.8144	3.7224	8.1269	9.2097				
4	.26933	.99478	2.8195	3.7220	8.1412	9.2091	16.1972	17.3952		
5	.26933	.99478	2.8195	3.7220	8.1484	9.2090	16.2027	17.3952	26.9726	28.2903
6	.26938	.99477	2.8197	3.7220	8.1489	9.2090	16.2085	17.3952	26.9745	28.2903
7	.26938	.99477	2.8197	3.7220	8.1491	9.2090	16.2105	17.3952	26.9780	28.2903
8	.26938	.99477	2.8197	3.7220	8.1492	9.2090	16.2105	17.3952	26.9805	28.2903

Sur ce tableau nous remarquons deux choses : premièrement à chaque $\lambda_{i\mu}^2$ il est possible d'associer une valeur propre ω^2 (que l'on notera $\omega_{i\mu}^2$), cette dernière étant d'autant plus proche du $\lambda_{i\mu}^2$ correspondant que le mode μ considéré est plus élevé.

Deuxièmement, les valeurs propres ω^2 dépendent du nombre M de modes choisis, mais la convergence est très rapide. Toutefois le mode ω_{21}^2 qui devrait être égal à 1 (l'unité choisie pour ω^2 est $\omega_u^2 = 2A_2(2\epsilon_2)^{1/2}$ en stellaire, $\omega_u^2 = n_i$ en Plasma, la valeur propre ω_{21}^2 qui correspond au mode de déplacement vaut donc 1 dans ces unités) semble converger vers une valeur légèrement inférieure. Généralement, dans nos calculs nous avons pris $M = 14$ et nous nous sommes intéressés aux 10 premiers couples $\omega_{1\mu}^2, \omega_{2\mu}^2$.

Le premier résultat qui se déduit des calculs effectués est que toutes les valeurs propres $\omega_{i\mu}^2$ sont réelles positives ou complexes, il n'y a pas de modes à $\omega_{i\mu}^2$ ainsi que nous l'avions prévu précédemment.

Sur la figure 19 nous avons tracé les $\lambda_{i\mu}^2$ et les $\omega_{i\mu}^2$ en fonction de α (pour un système stellaire avec $\beta = .5$) et cela pour les premiers modes désignés par 1S, 1AS, 2S, 2AS,... (premier mode symétrique, premier mode antisymétrique, deuxième mode symétrique,...)

La première branche du mode 1S correspond au mode marginal $\omega = 0$ ($\omega_{11}^2 = 0$). Sur cette figure nous voyons que les $\omega_{i\mu}^2$ sont réels positifs sauf au voisinage des croisements $\lambda_{i\mu}^2 = \lambda_{2\mu}^2$ où ils sont complexes conjugués.

Sur la figure 19 nous voyons que pour $\beta = .5$ les modes 1S, 1AS, 2S sont toujours stables. Les modes 2AS et 3S sont instables pour $\alpha \geq .934$ et $\alpha \geq .848$. Pour le mode 3AS, nous avons un croisement $\lambda_{13}^2 = \lambda_{23}^2$ pour $\alpha = .854$ et ce mode est instable à partir de $\alpha = .797$. Pour les modes de rang plus élevé (4S, 4AS,...) la région correspondant aux $\omega_{i\mu}^2$ complexes (et donc à l'instabilité) est de plus en plus petite autour du point de croisement. La situation est exactement la même dans le cas d'un plasma (ici le mode ω_{21}^2 symétrique est fixe et $\omega_{11}^2 = 1$), la figure 20 montre le comportement de ω_{14}^2 et de ω_{24}^2 autour du point de croisement $\lambda_{14}^2 = \lambda_{24}^2$ pour un plasma avec $\beta = .5$ $\gamma = 1.3$. Sur les figures 21, 22, 23 nous avons indiqué les modes instables pour chaque valeur de α , pour un système stellaire avec $\beta = .5$ (fig 21), pour un plasma avec $\beta = .5$ et $\gamma = 1.5$ (fig 22), $\beta = .5$ et $\gamma = 1.7$ (fig 23). La figure 21 montre que le système stellaire est stable tant que $\tau_1 < \tau_2$. En effet si l'on considère les modes découplés de rang élevé, nous pouvons appliquer la méthode de W.K.B. et l'on a :

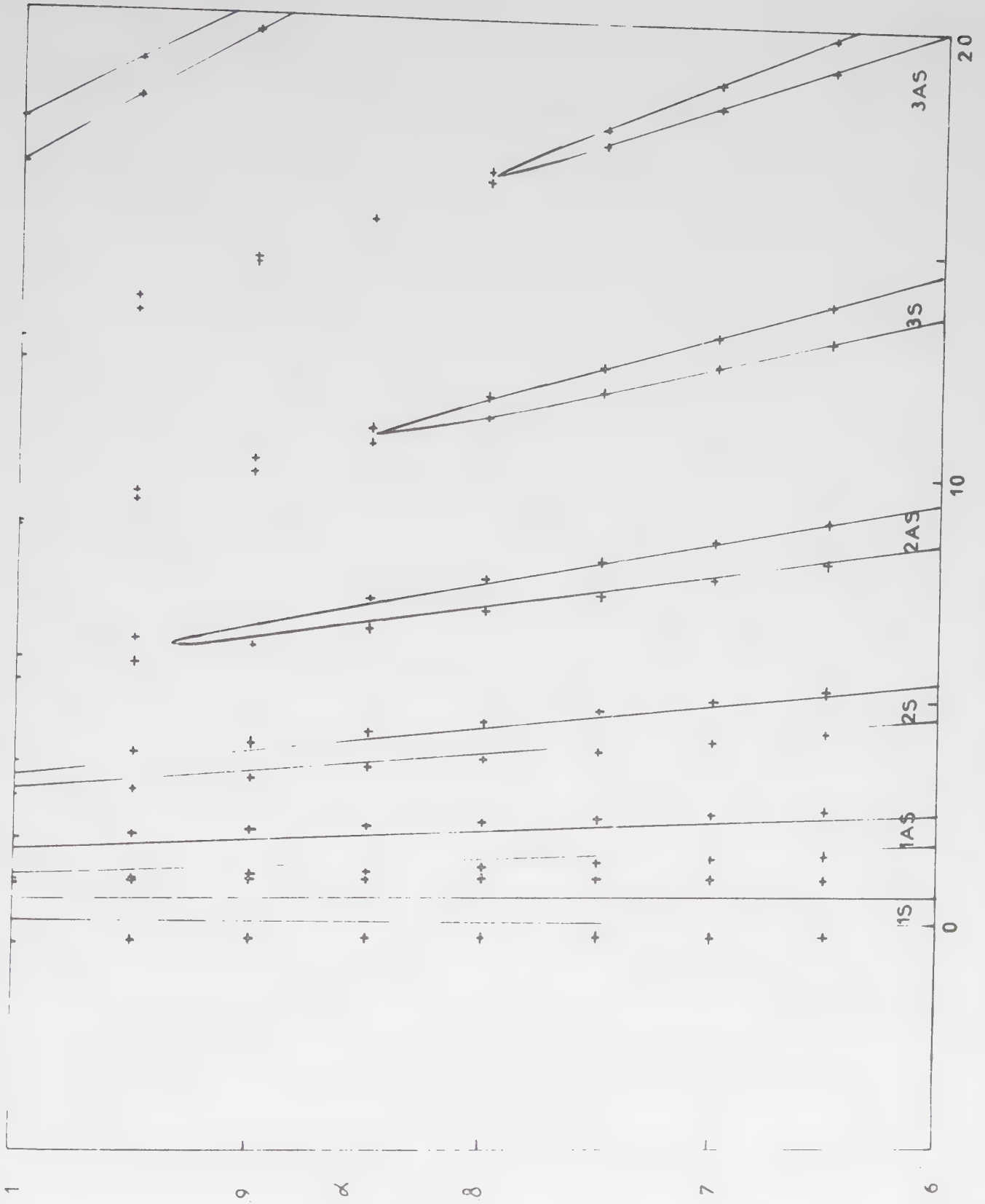


Figure 19:
Fréquences propres ω_{iu}^2 (notées +) et ω_{iu}^2 (en trait continu)
pour un système stellaire dans le cas $\beta = .5$

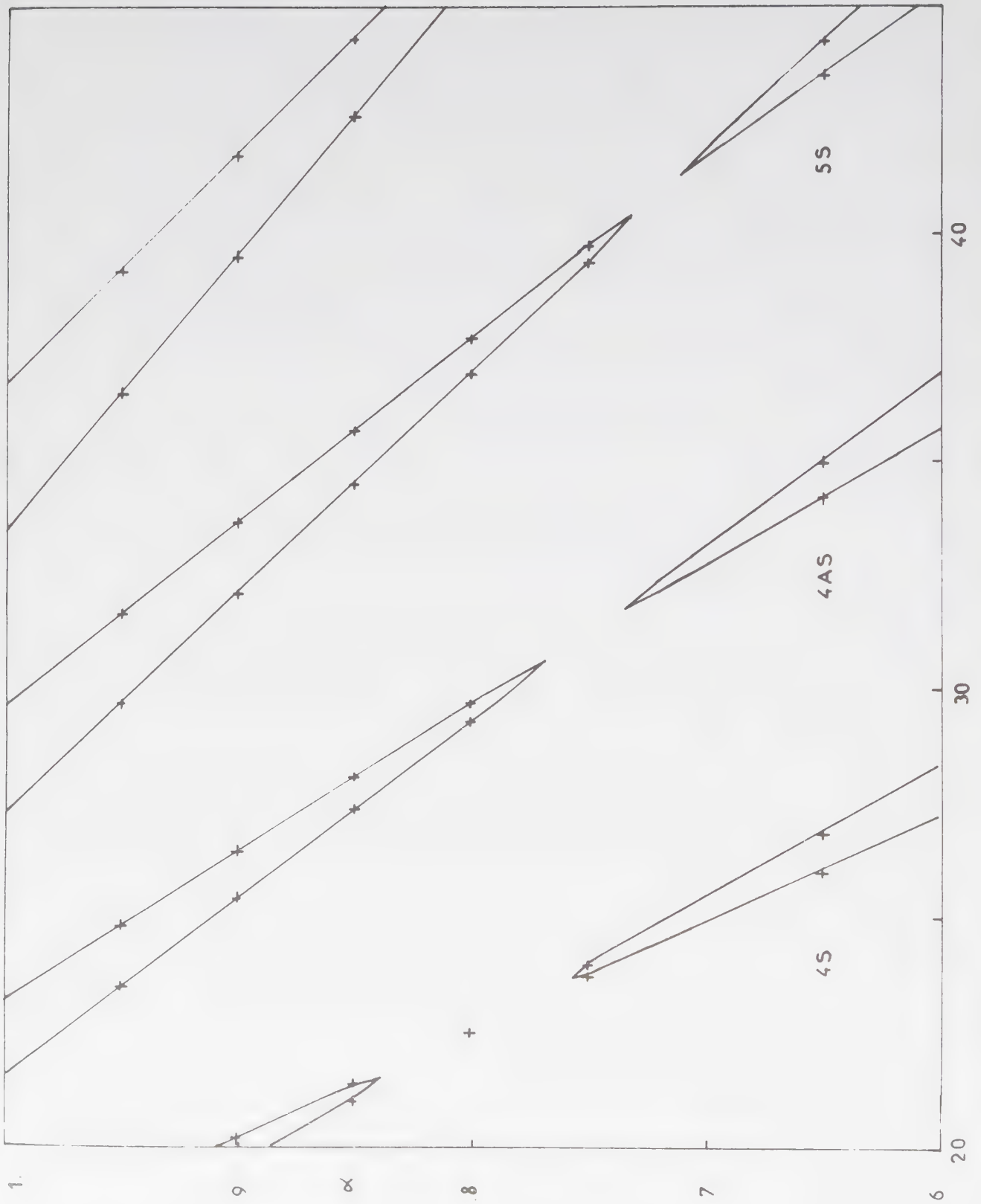


Figure 19 (suite)

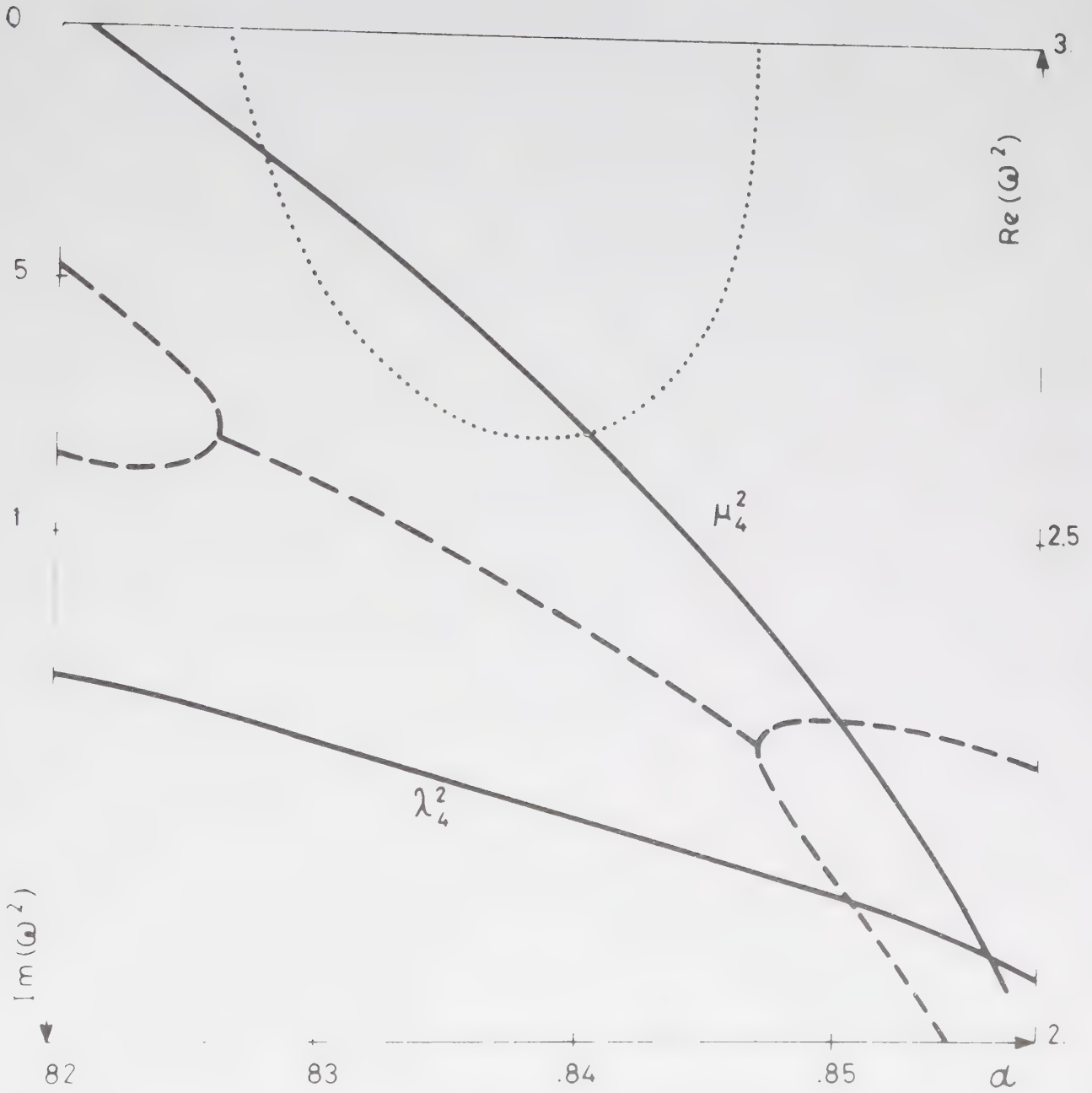


Figure 20

Comportement de ω^2 au voisinage du croisement
 $\lambda_{14}^2 = \lambda_{24}^2$ (ici $\lambda_{14}^2 = \lambda_4^2$ et $\lambda_{24}^2 = \mu_4^2$)

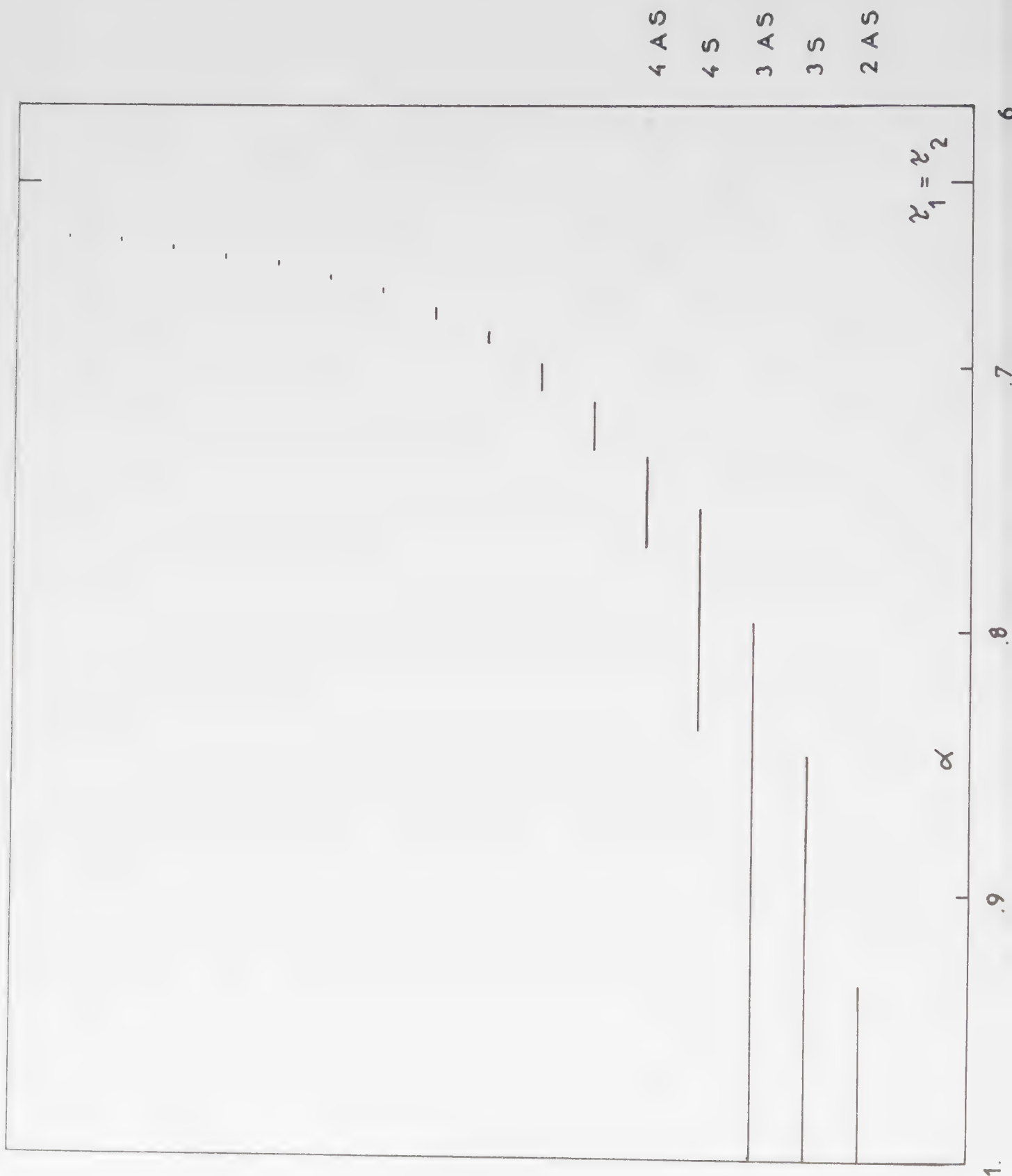


Figure 21

Modes instables pour $\beta = .5$ (stellaire); 2 AS signifie que ω_{12}^2 et ω_{22}^2 sont complexes

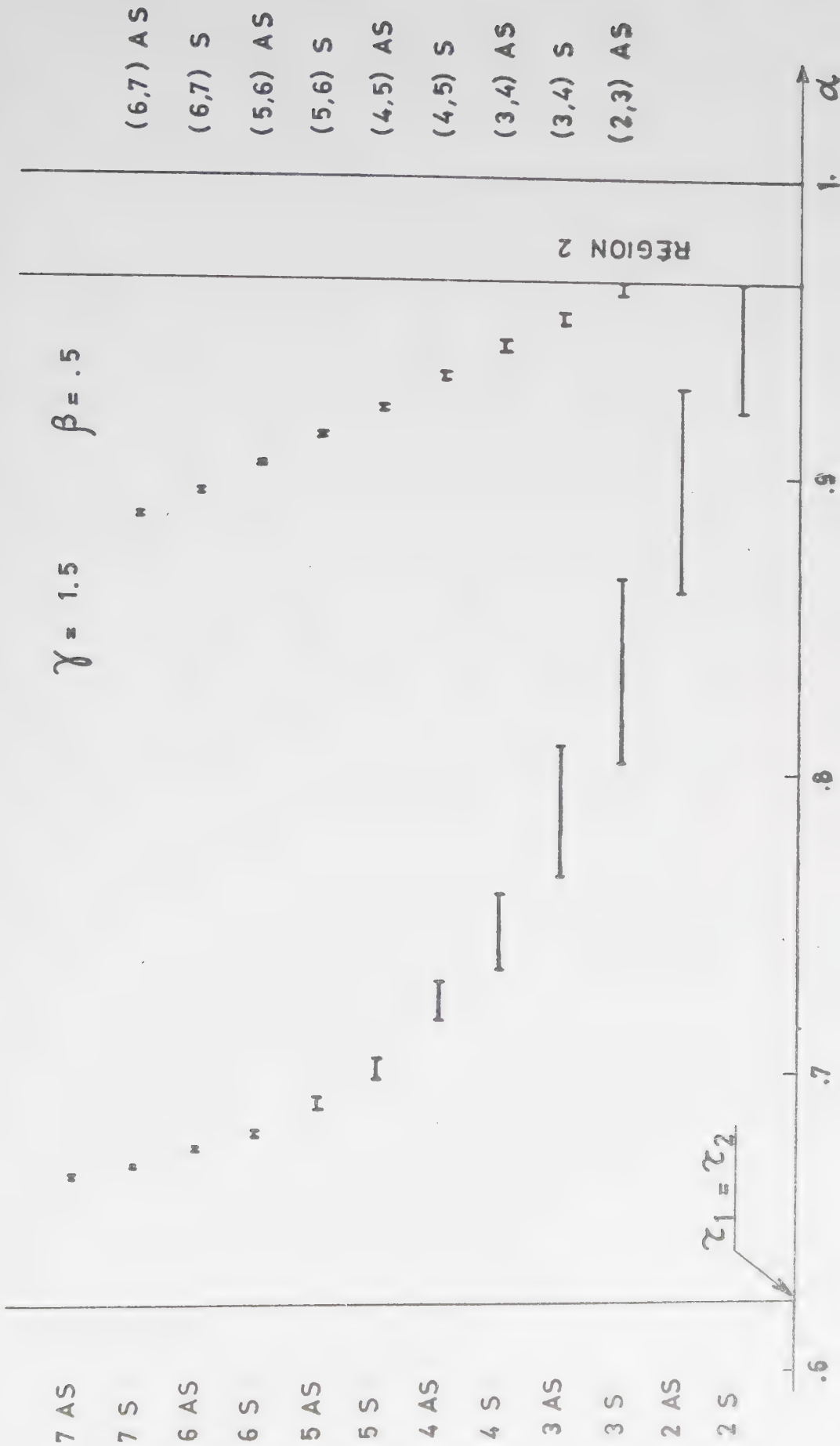


Figure 22:

Modes instables pour $\gamma=1.5, \beta=.5$

(2S signifie que les modes ω_{12}^2 et ω_{22}^2 symétriques sont instables ...)

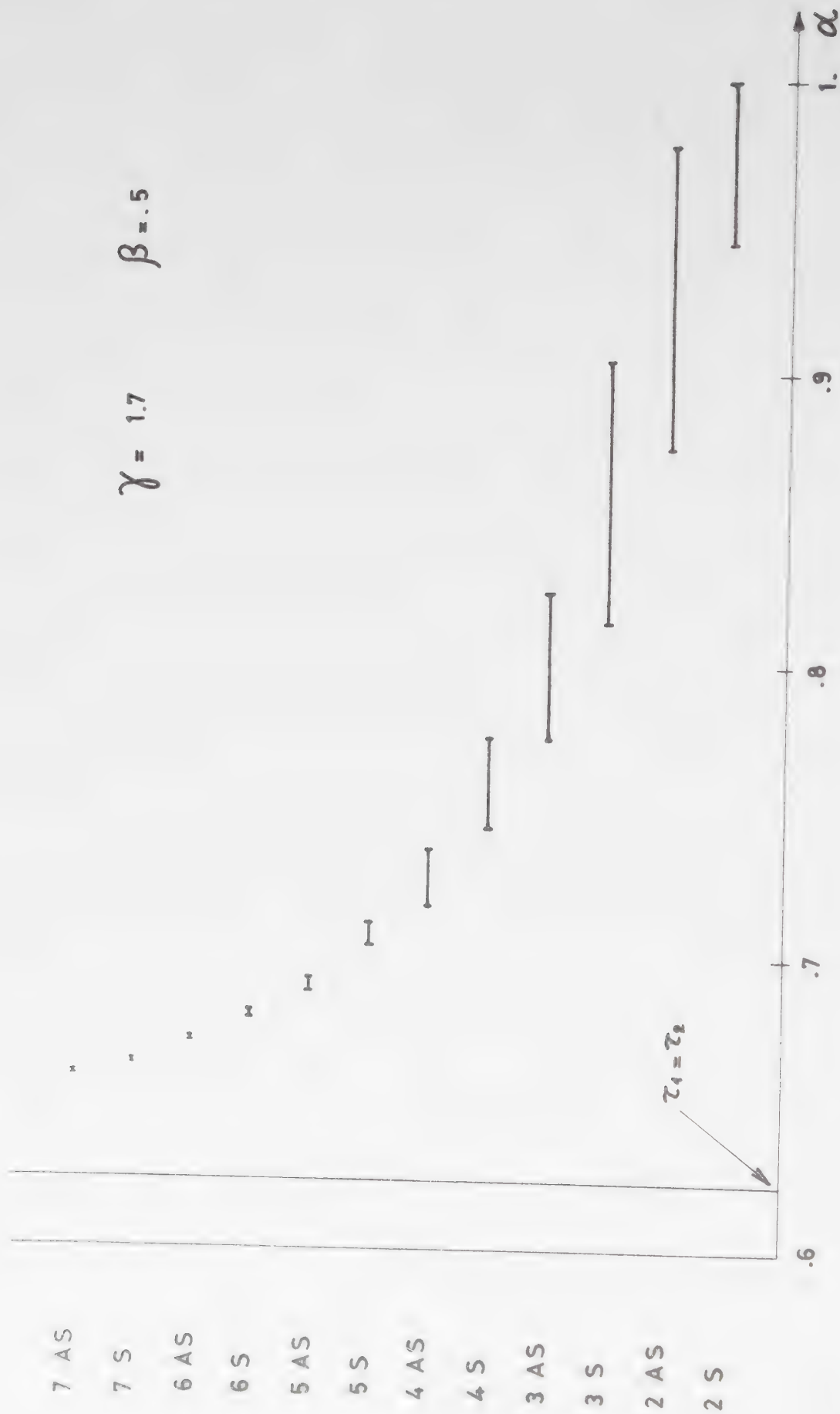


Figure 23

Modes instables pour $\gamma=1.7$ et $\beta=.5$

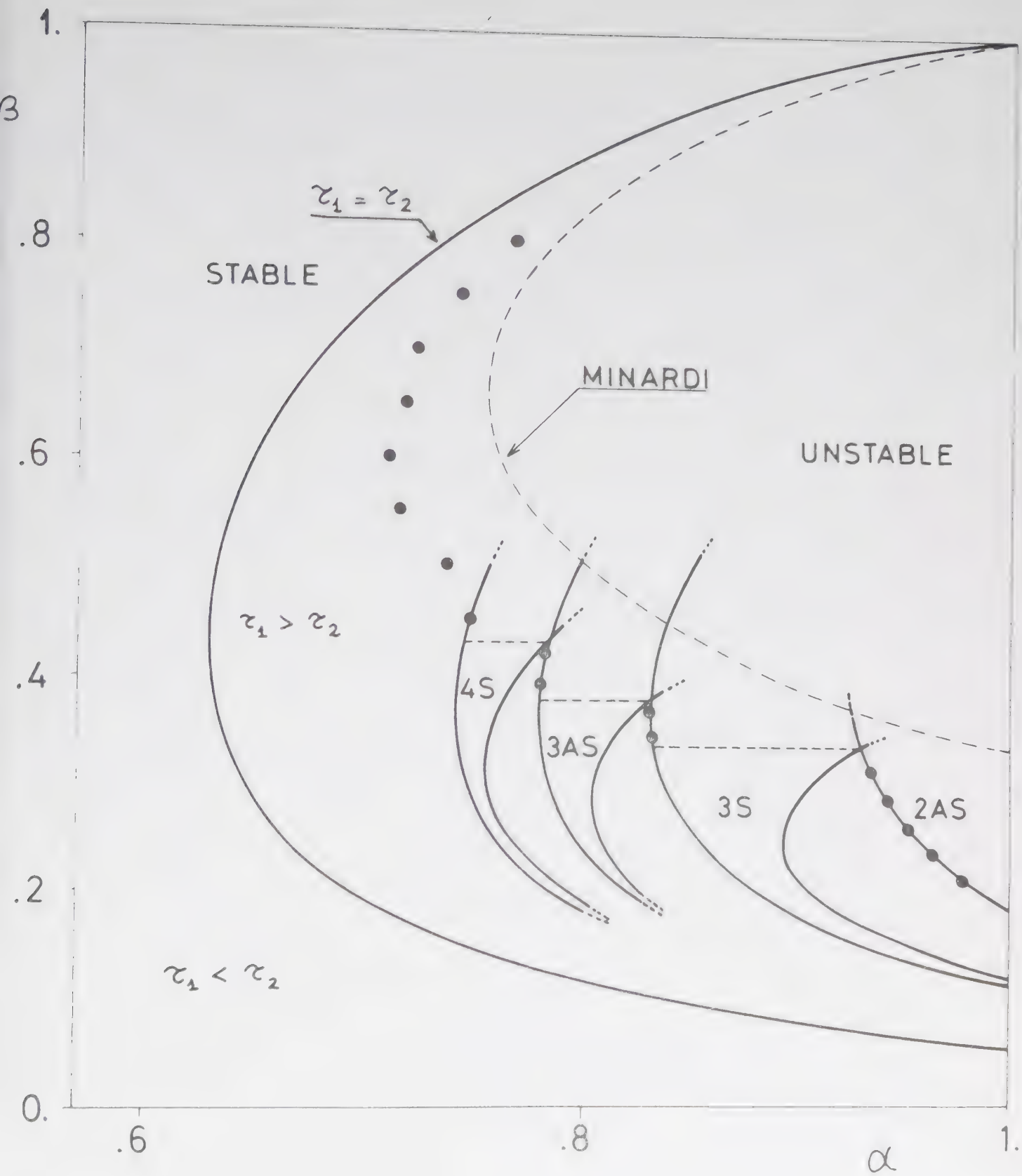


Figure 24:

Diagramme de stabilité du double "Water-Bag" en Dynamique
stellaire.

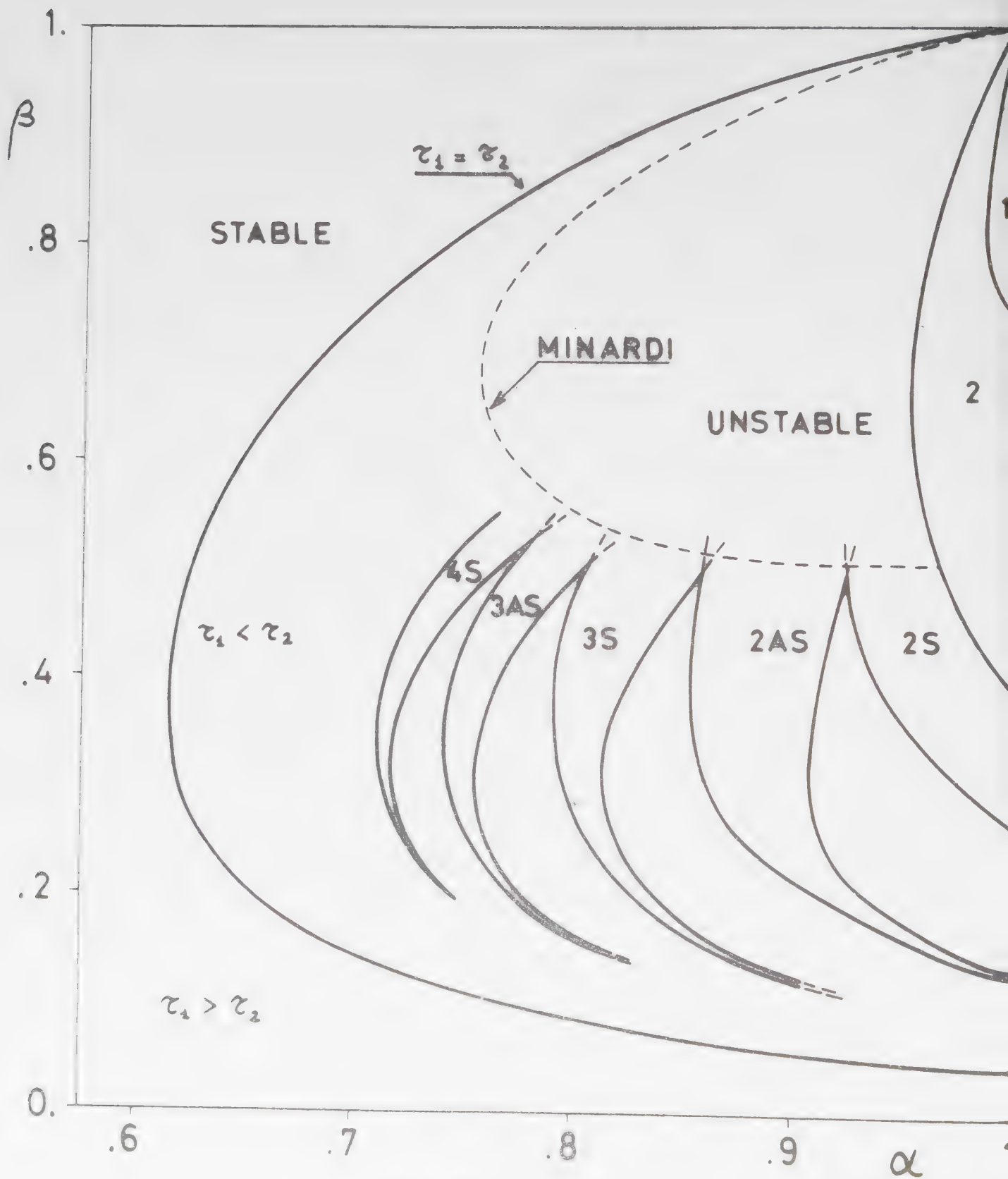


Figure 24:

Diagramme de stabilité du double "Water-Bag" pour un plasma

$$\lambda_{1\mu}^2 = \left[(2\mu-1) \frac{\pi}{2} \right]^2 \frac{1}{\tau_1^2} - s\alpha\sqrt{\beta} \int_0^{\tau_1} \left(1-U^{(0)}/\epsilon_1 \right)^{1/2} d\theta_1/\tau_1 \quad (70)$$

$$\lambda_{2\mu}^2 = \left[(2\mu-1) \frac{\pi}{2} \right]^2 \frac{1}{\tau_2^2} + s \int_0^{\tau_2} \left(1-U^{(0)}/\epsilon_2 \right)^{1/2} d\theta_2/\tau_2 \quad (71)$$

(ceci pour des modes symétriques)

L'égalité $\lambda_{1\mu}^2 = \lambda_{2\mu}^2$ est équivalente à :

$$\left[(2\mu-1) \frac{\pi}{2} \right]^2 \left(\frac{1}{\tau_1^2} - \frac{1}{\tau_2^2} \right) = s\{\alpha\sqrt{\beta} \int_0^{\tau_1} \left(1-U^{(0)}/\epsilon_1 \right)^{1/2} d\theta_1/\tau_1 + \int_0^{\tau_2} \left(1-U^{(0)}/\epsilon_2 \right)^{1/2} d\theta_2/\tau_2\} \quad (72)$$

Sur cette équation nous voyons que les croisements $\lambda_{1\mu}^2 = \lambda_{2\mu}^2$ ne sont possible pour un système stellaire (pour lequel $s = -1$) que si $\tau_1 > \tau_2$. Pour un plasma ces croisements se produiront si $\tau_2 < \tau_1$. C'est ce qui apparait sur les figures 21, 22, 23. Sur ces figures nous voyons qu'en se déplaçant dans le sens α croissant, les premières instabilités apparaissent pour les modes de rang élevé à partir de la limite $\tau_1 = \tau_2$, les zones instables sont alors très petites et alternent avec les zones stables. Pour, α croissant, les croisements se produisent pour des modes de rang moins en moins élevé, les zones instables s'agrandissent et finalement à partir d'une certaine valeur de α ($\alpha = .743$ dans le cas de la figure 21) et il y a toujours au moins un mode instable. Précisons que pour un plasma la valeur limite de α au delà de laquelle le système est toujours instable (tout au moins dans la région correspondant aux équilibres de type 3) diminue avec γ , pour β fixé (pour $\beta = .5$: $\alpha = .85$ pour $\gamma = 1.3$, $\alpha = .805$ pour $\gamma = 1.5$, $\alpha = .775$ pour $\gamma = 1.7$, $\alpha = .760$ pour $\gamma = 2$).

Les figures 24 et 25 indiquent les zones stables et instables (pour les premiers modes) dans le plan (α, β) pour un système stellaire et pour un plasma avec $\gamma = 1.5$. Sur ces 2 diagrammes les points situés à gauche de la

courbe $\tau_1 = \tau_2$. ($\tau_1 < \tau_2$ pour un système stellaire, $\tau_1 > \tau_2$ pour un plasma) correspondent à des équilibres stables. Nous avons indiqué sur ces figures les zones instables des premiers modes. Pour des faibles valeurs de β (disons $\beta < .5$) nous avons alternance de bandes stables et instables. Ces bandes instables s'élargissent lorsqu'on se déplace dans le sens des β croissants et finalement les bandes instables se recouvrent et nous avons une région qui est toujours instable.

Nous remarquons en particulier que pour $\alpha = 1$. (c'est-à-dire quand la densité de phase est nulle à l'intérieur du premier contour) des systèmes stables existent pour des faibles valeurs de β .

D'autre part, dans le coin supérieur droit, nous pouvons faire tendre α et β simultanément vers 1, les équilibres correspondants sont stables si l'on se déplace à gauche de la courbe $\tau_1 = \tau_2$.

Il est remarquable que tous les résultats que nous avons présentés ici sont valables pour les 2 systèmes : stellaire et plasma.

Les équilibres qui ont la même configuration dans l'espace des phases ont les mêmes propriétés de stabilité et d'instabilité. Dans les 2 cas il existe un mode de déplacement toujours présent et il n'y a pas de modes à $\omega^2 < 0$.

Les modes complexes apparaissent autour des croisements des modes découplés et dans les 2 cas la courbe $\tau_1 = \tau_2$ joue un rôle fondamental.

L'analogie entre les deux cas n'est cependant pas totale.

b) Particularités propres aux plasmas : Pour les systèmes stellaires, τ_1 et τ_2 varient très lentement en fonction de α et β , les modes découplés restent bien ordonnés et les seuls croisements possibles sont du type $\lambda_{1\mu}^2 = \lambda_{2\mu}^2$. Par contre pour les plasmas il n'en est pas ainsi. Si τ_1 varie lentement en fonction de α (β et γ fixés) il n'en est pas de même pour τ_2 . En effet lorsqu'on s'approche de la courbe limitant les équilibres du type 3 et du type 2, les limites du 2^{ème} contour c'est-à-dire les points τ_{a2} , s'écartent de plus en plus et deviennent infinis sur la frontière des équilibres du type 3 et du type 2. Par conséquent τ_2 devient de plus en plus grand et tend vers l'infini, les valeurs propres $\lambda_{2\mu}^2$ décroissent et tendent vers zéro ainsi que le montre la figure 26 (pour $\beta = .5$, $\gamma = 1.3$)

Ceci permet des croisements du type $\lambda_{1\mu}^2 = \lambda_{2\nu}^2$ avec $\mu < \nu$. A ces croisements (que nous désignons par secondaires par rapport aux croisements principaux $\lambda_{1\mu}^2 = \lambda_{2\mu}^2$) correspondent également des zones instables mais moins étendues autour de ces croisements que les instabilités principales. (Voir Figure 22) Sur le diagramme complet (figure 25) nous n'avons pas indiqué ces instabilités secondaires.

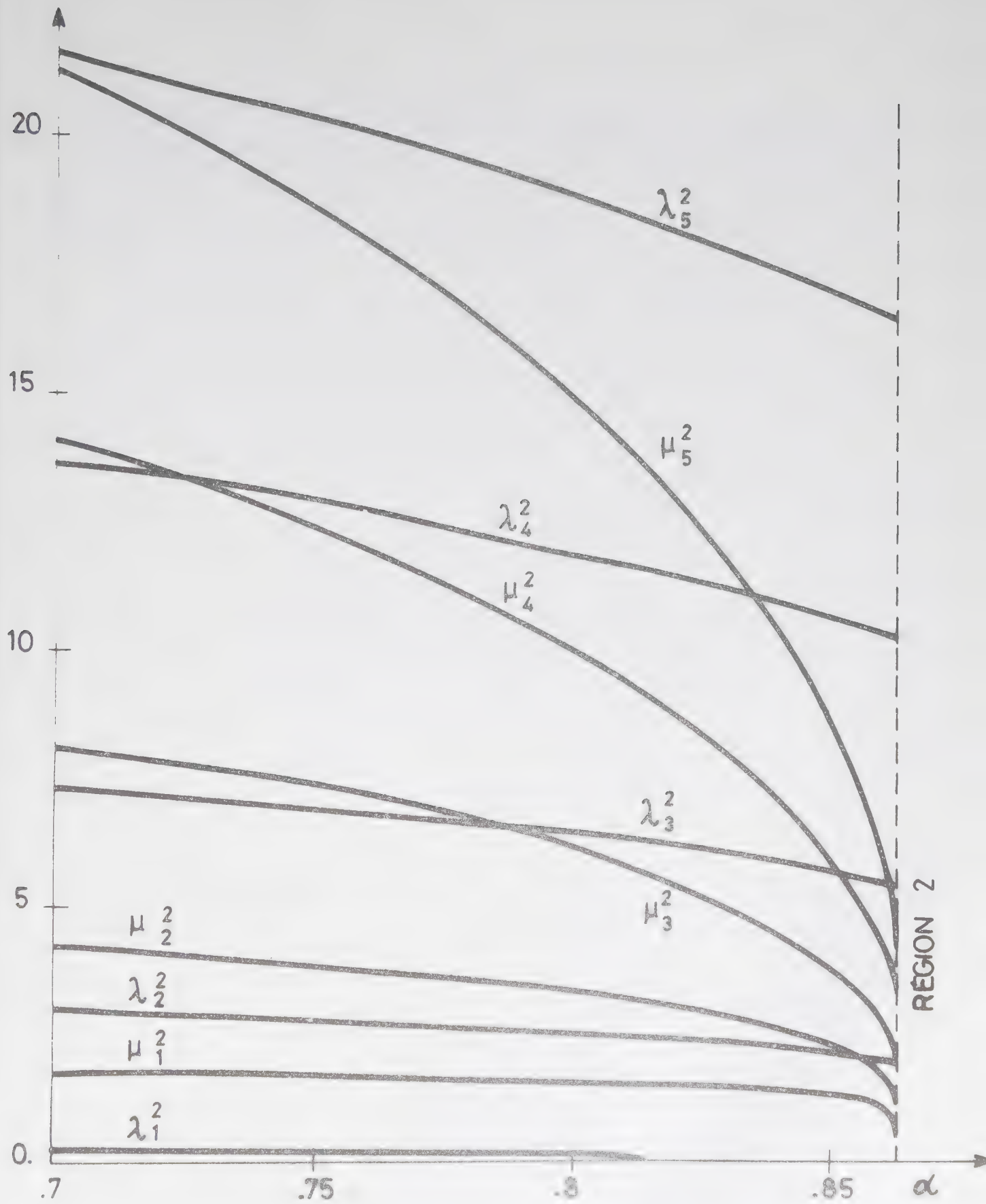


Figure 26:
Fréquences propres découplées λ_{1v}^2 (notées λ_v^2) et μ_{1v}^2
(notées μ_v^2) en fonction de α

3) Comparaison avec le critère d'instabilité de MINARDI : Sur des bases thermodynamiques, MINARDI /26/, a établi une condition suffisante d'instabilité. Si $I(x)$ désigne la "variable d'information" du système, $\phi(x)$ le potentiel associé à cette variable et si $\langle \phi \rangle$ est la moyenne spatiale de $\phi(x)$, le critère dit que si Φ défini par

$$\Phi = \int I(x) \left(\phi(x) - \langle \phi \rangle \right) dx$$

est négatif alors le système est instable. Par contre si $\Phi > 0$, aucune conclusion ne peut être tirée.

Dans le cas d'un système stellaire, l'application de ce critère ne présente pas de difficultés : nous pouvons prendre

$$I(x) = \rho^{(0)}(x)$$

$$\text{et } \phi(x) = U^{(0)}(x)$$

Pour un plasma, nous remarquons que la densité des ions étant uniforme, la variable d'information est alors la densité électronique :

$$\rho_e^{(0)}(x) = 2A_1 V_1(x) + 2A_2 V_2(x) = I(x) \text{ et le potentiel } \phi(x) \text{ est donné par l'équation}$$

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = \rho_e^{(0)}(x)$$

Sur chaque diagramme (α, β) nous avons tracé la courbe $\Phi = 0$ délimitant ainsi une région instable. Celle-ci est incluse dans la zone totalement instable déterminée numériquement, et la recouvre presque totalement.

4) Conclusion : Les équilibres du type double Water-Bag en Stellaire et en Plasma (type 3) présentent les mêmes propriétés de stabilité. Il n'y a pas de modes négatifs. Dans chaque cas la comparaison de τ_1 et τ_2 fournit une condition suffisante de stabilité, le critère de MINARDI étant alors une bonne condition suffisante d'instabilité. Il serait évidemment intéressant d'étudier des fonctions de distribution plus générales, une première étape dans ce sens sera effectuée au paragraphe G où nous étudierons la stabilité d'une classe d'équilibres stellaires à l'aide du multiple Water-Bag.

D'autre part pour le modèle double Water-Bag en plasma, les équilibres apériodiques ne sont pas les seuls équilibres possibles. Les équilibres péri-

diques (type 1 et 2) correspondant aux ondes de B.G.K représentent une classe importante d'états stationnaires et l'étude de leur stabilité présente un intérêt fondamental.

F) STABILITE DES SOLUTIONS PERIODIQUES EN PLASMA

Pour l'étude de la stabilité des solutions périodiques nous pouvons envisager 2 points de vue différents.

Dans le premier, les conditions aux limites sont rejetées à l'infini et par conséquent ne jouent pas de rôle, il suffit de supposer que les perturbations $E^{(1)}(x)$ s'annulent à l'infini : $E^{(1)}(\pm\infty) = 0$

par contre si l'on considère un plasma de longueur $2L$ formé de $2N + 1$ périodes, nous devons remarquer que ceci ne constitue pas un équilibre (au sens physique du terme) les trajectoires de l'espace des phases n'étant pas fermées. Toutefois dans les expériences numériques on utilise la technique suivante : les particules qui atteignent la limite $x = -L$ (ou $x = +L$) sont réinjectées avec la même vitesse en $x = -L$ (ou $x = +L$). De plus la périodicité du système est assurée en imposant la relation :

$$\int_{-L}^{+L} E \, dx = 0$$

Pour ces expériences il est alors possible de construire des équilibres.

1) Stabilité de systèmes formés d'une seule période : Ainsi que nous l'avons signalé au paragraphe B.2 les propriétés de stabilité des systèmes constitués par une seule période sont mal connues. Dans ce paragraphe nous étudierons donc la stabilité de ces équilibres. La méthode employée pour les systèmes apériodiques peut également être utilisée dans ce cas. Nous considérons donc un système formé d'une seule période avec des perturbations ayant des conditions aux limites strictement périodiques ; c'est-à-dire que nous ne considérerons que les modes $E^{(1)}(x)$ antisymétriques vérifiant la relation $E^{(1)}(\pm L) = 0$, conformément à ce qui a été dit au paragraphe D, et aux expériences numériques.

Remarque : Les solutions particulières au système (26) : $E_i^{(1)}(x) = \delta\rho_i^{(0)}(x)$ avec $\omega^2 = n_i$ que nous avons mis en évidence précédemment sont telles que

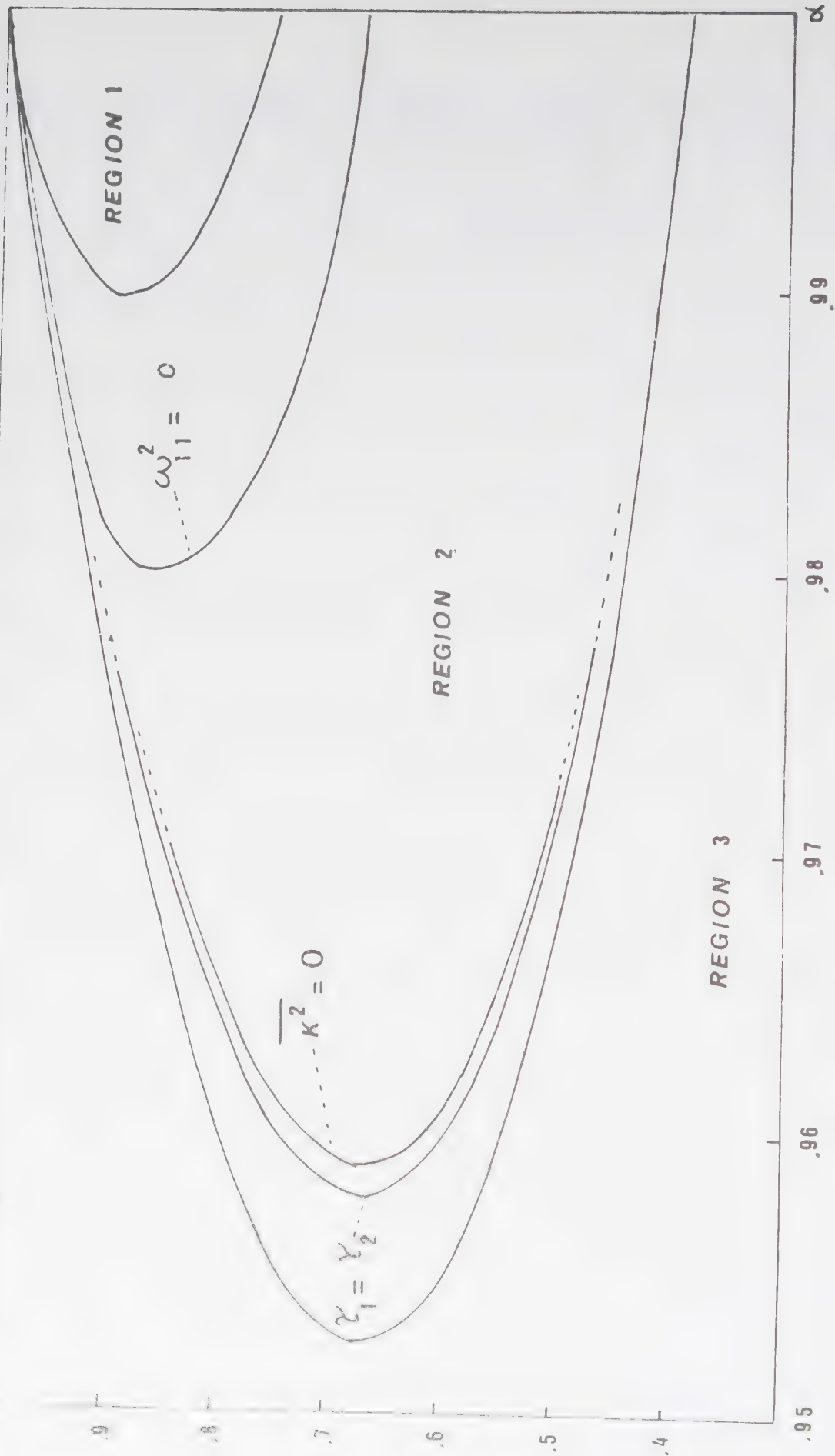


Figure 27

Courbes $\tau_1 = \tau_2$ et $\overline{K^2} = 0$ dans le plan (α, β) pour $\gamma = 1.5$

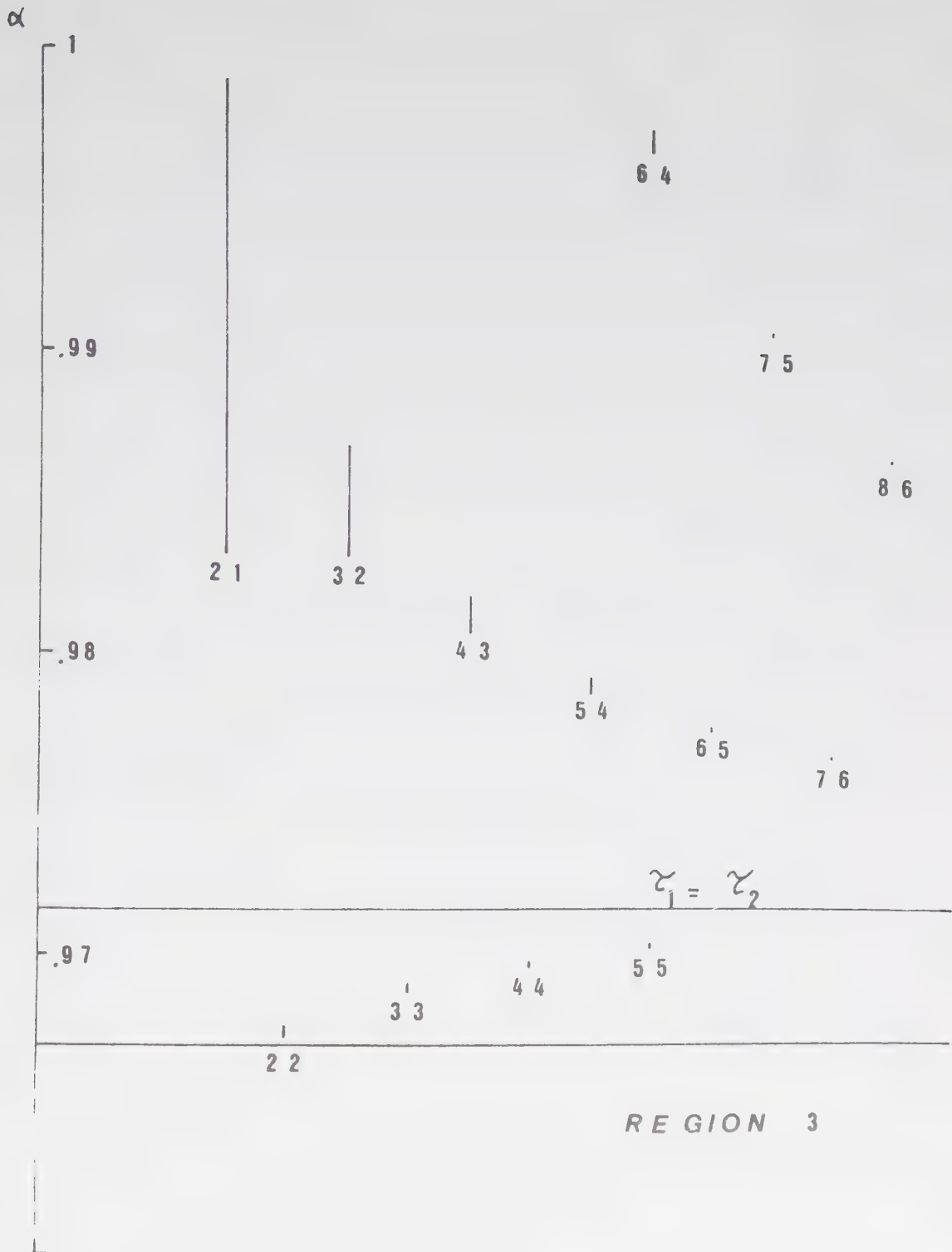


Figure 28:

Zones d'instabilités à ω^2 complexes pour $\gamma=1.5, \beta=0.5$
 Les nombres μ et ν signifient que les modes $\omega_{1\mu}^2$ et $\omega_{2\nu}^2$
 sont instables.

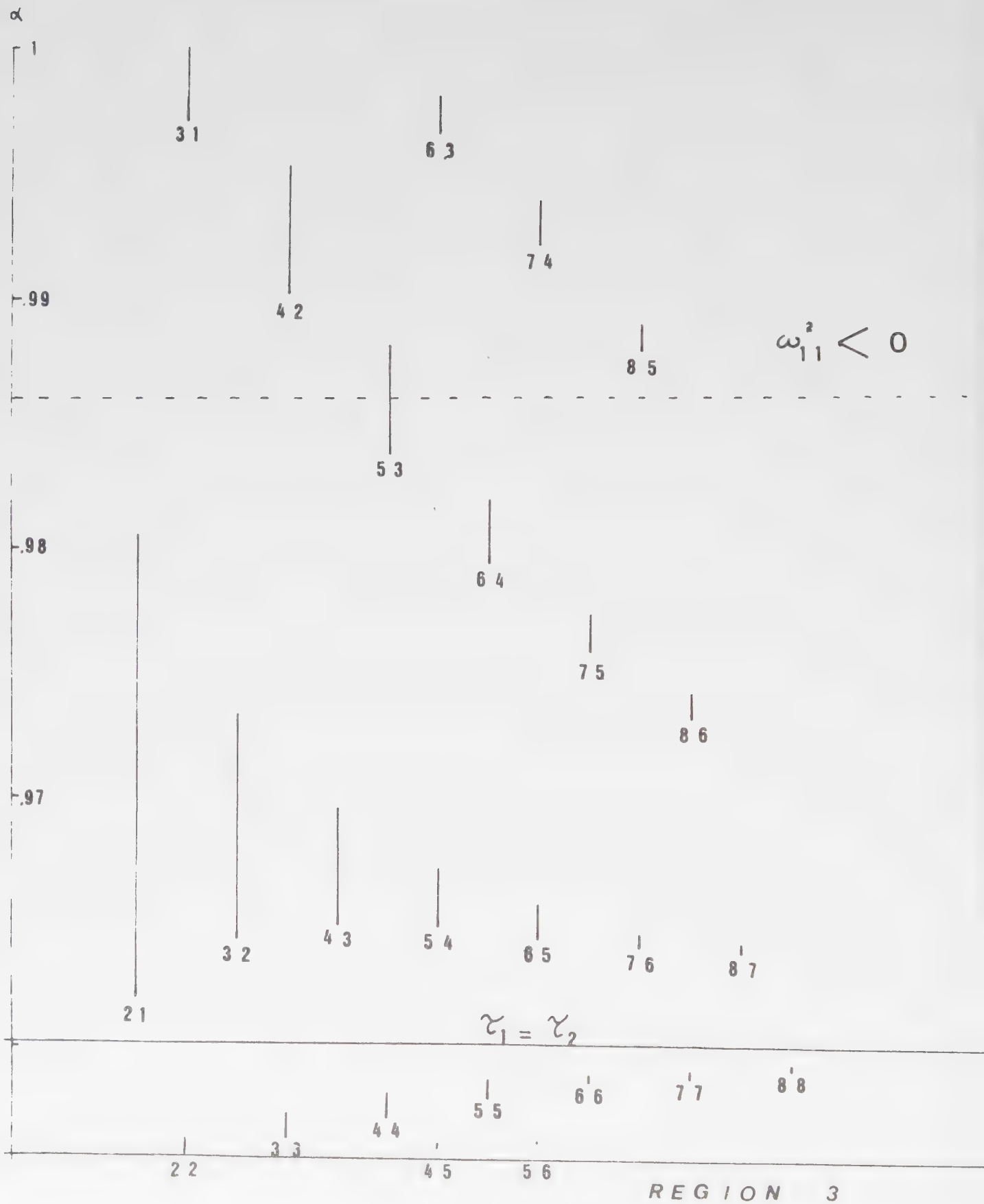


Figure 29:

Zones d'instabilités à ω^2 complexes pour $\gamma=1.5, \beta=0.75$

$E^{(1)}(x)$ est symétrique et $\frac{dE^{(1)}}{dx}(\pm L) = 0$.

Ce sont donc des solutions du groupe (IVS), le potentiel $U^{(1)}(x) = \delta(E^{(0)}(x) + n_i x)$ est une fonction antisymétrique et $U^{(1)}(\pm L) = \pm \delta n_i L$, le potentiel n'est donc pas périodique. Cette solution n'étant pas strictement périodique ne peut pas convenir.

Considérons tout d'abord les équilibres du type 2. Le calcul des fréquences propres ω^2 montre qu'il existe 2 types d'instabilités : les instabilités à ω^2 négatif et les instabilités à ω^2 complexe situées autour des points de croisement $\lambda_{1\mu}^2 = \lambda_{2\nu}^2$. Nous nous plaçons dans un plan (α, β) à γ fixé. Comme pour les équilibres de type 3 nous pouvons tracer une courbe $\tau_1 = \tau_2$ dans la région 2, cette courbe est située près de la courbe limitant les régions 2 et 3. (Fig 27) Entre ces 2 courbes nous avons des croisements du type $\lambda_{1\mu}^2 = \lambda_{2\mu}^2$ auxquels correspondent des zones instables (voir fig 28 et 29) et nous avons également des croisements secondaires $\lambda_{1\mu}^2 = \lambda_{2\nu}^2$ avec $\nu > \mu$ associés à des zones instables moins importantes. Autour de la région 1 il y a une zone d'instabilité à $\omega^2 < 0$: le premier mode antisymétrique est instable, la région 1 étant elle même instable avec $\omega^2 < 0$ (Fig 27). D'autre part pour des équilibres tels que $\tau_1 > \tau_2$ les croisements $\lambda_{1\mu}^2 = \lambda_{2\nu}^2$ avec $\nu < \mu$ sont possibles et les zones instables correspondantes peuvent être très importantes en particulier pour les premiers modes (Fig 28 et 29).

Pour les équilibres périodiques de type 2 il n'est donc pas possible de faire apparaître une condition suffisante de stabilité ou d'instabilité. La situation est très complexe, dans le plan (α, β) γ fixé, les zones stables sont mélangées aux zones instables. Par contre pour les équilibres du type 1, tous les cas que nous avons étudiés étaient instables. (au moins avec $\omega^2 < 0$)

Pour les équilibres de type 2 nous avons donc 2 types d'instabilité :

- + les instabilités à $\omega^2 < 0$ qui existent toujours pour les équilibres du type 1 et dans une zone de la région 2 entourant la région 1.
- + les instabilités à ω^2 complexe qui apparaissent autour de $\tau_1 = \tau_2$, ces instabilités sont moins importantes pour les α grands.

2) Stabilité des équilibres périodiques infinis : Pour un plasma de longueur $2L$

formé de $2N + 1$ périodes, la méthode de calcul des fréquences ω peut s'appliquer, cependant à cause des temps de calcul qui varient comme $((N+2) \times M)^2$ nous sommes limités à des N petits. La méthode précédemment employée ne peut donc plus s'appliquer pour l'étude des plasmas infinis.

Une autre méthode qui s'offre à nous est la méthode du mode marginal adiabatique que nous avons précédemment exposée. Cette méthode ne peut mettre en évidence qu'une condition suffisante d'instabilité, si nous pouvons montrer qu'il existe toujours au moins un mode $\omega^2 < 0$ nous pourrions conclure que les équilibres périodiques infinis sont tous instables.

La fonction $k^2(x)$ est une fonction périodique et nous cherchons les valeurs propres λ de l'opérateur

$$-\frac{d^2}{dx^2} + k^2(x)$$

Si nous pouvons montrer qu'il existe au moins une valeur propre λ négative nous en concluons que l'équilibre considéré est instable.

La résolution directe de l'équation :

$$-\frac{d^2\phi}{dx^2} + k^2(x)\phi = \lambda\phi$$

(7)

avec $d\phi/dx(\pm\infty) = 0$.

présente des difficultés du fait du comportement de la fonction $k^2(x)$. En effet pour des équilibres périodiques du type 2, la fonction $k^2(x)$ devient infinie lorsque le contour intérieur se ferme. Ceci est dû au caractère "double Water-Bag" de la fonction et cette divergence est un problème numérique.

En fait, nous sommes seulement intéressés par le signe des premières valeurs propres λ . Une méthode consiste à calculer, pour un opérateur A , le coefficient de RAYLEIGH-RITZ /65/ donné par

$$R(f) = \frac{\int f A f \, dx}{\int f^2 \, dx}$$

Pour notre opérateur ceci devient :

$$R(f) = \frac{\int k^2(x) f^2 dx + \int \left(\frac{df}{dx}\right)^2 dx}{\int f^2 dx} \quad (74)$$

(f étant une fonction d'essai satisfaisant les mêmes conditions aux limites que ϕ). On montre (/65/) que R est toujours plus grand que la première valeur propre λ . Par conséquent, pour un équilibre donné, il suffit de trouver une fonction d'essai f telle que $R(f) < 0$ pour conclure que cet équilibre est instable.

La fonction d'essai la plus simple que l'on puisse considérer est $f = \text{constante}$ qui conduit à

$$R(f) = \frac{\int k^2 dx}{\int dx} = \langle k^2(x) \rangle \quad (75)$$

Les systèmes périodiques tels que $\langle k^2 \rangle < 0$ sont donc instables. Cette condition est réalisée pour un grand nombre d'équilibre périodiques comme le montrent les figures (27 et 30).

Si l'on remarque que $\langle k^2 \rangle \sim (\tau_2 - \alpha \tau_1)$ on voit que la courbe $\langle k^2 \rangle = 0$ est toujours située à droite de la courbe $\tau_1 = \tau_2$ dans le plan (α, β) γ fixé ; de plus elle est toujours située dans la région 2, ainsi nous pouvons conclure que les équilibres du type 1 sont toujours instables.

Cette limite d'instabilité des modes négatifs peut être reculée vers la courbe séparant les régions 2 et 3 en prenant d'autres fonctions d'essai.

(HOLEC /66/) Par exemple

$$e^{-\mu x^2}, (1+\eta x^2) e^{-\mu x^2}, \dots$$

(Figure 30). Malheureusement, nous devons prendre des fonctions d'essai de plus en plus compliquées, ce qui augmente le nombre de paramètres rendant ainsi la recherche de plus en plus difficile.

Pour les équilibres double Water-Bag nous sommes parvenus à reculer la limite d'instabilité par mode $\omega^2 < 0$ pratiquement sur la frontière entre les zones 2 et 3. Cela suggère que très probablement les équilibres du type 2 sont également instables bien que nous n'ayons pas pu donner une démonstration rigoureuse de cette propriété.

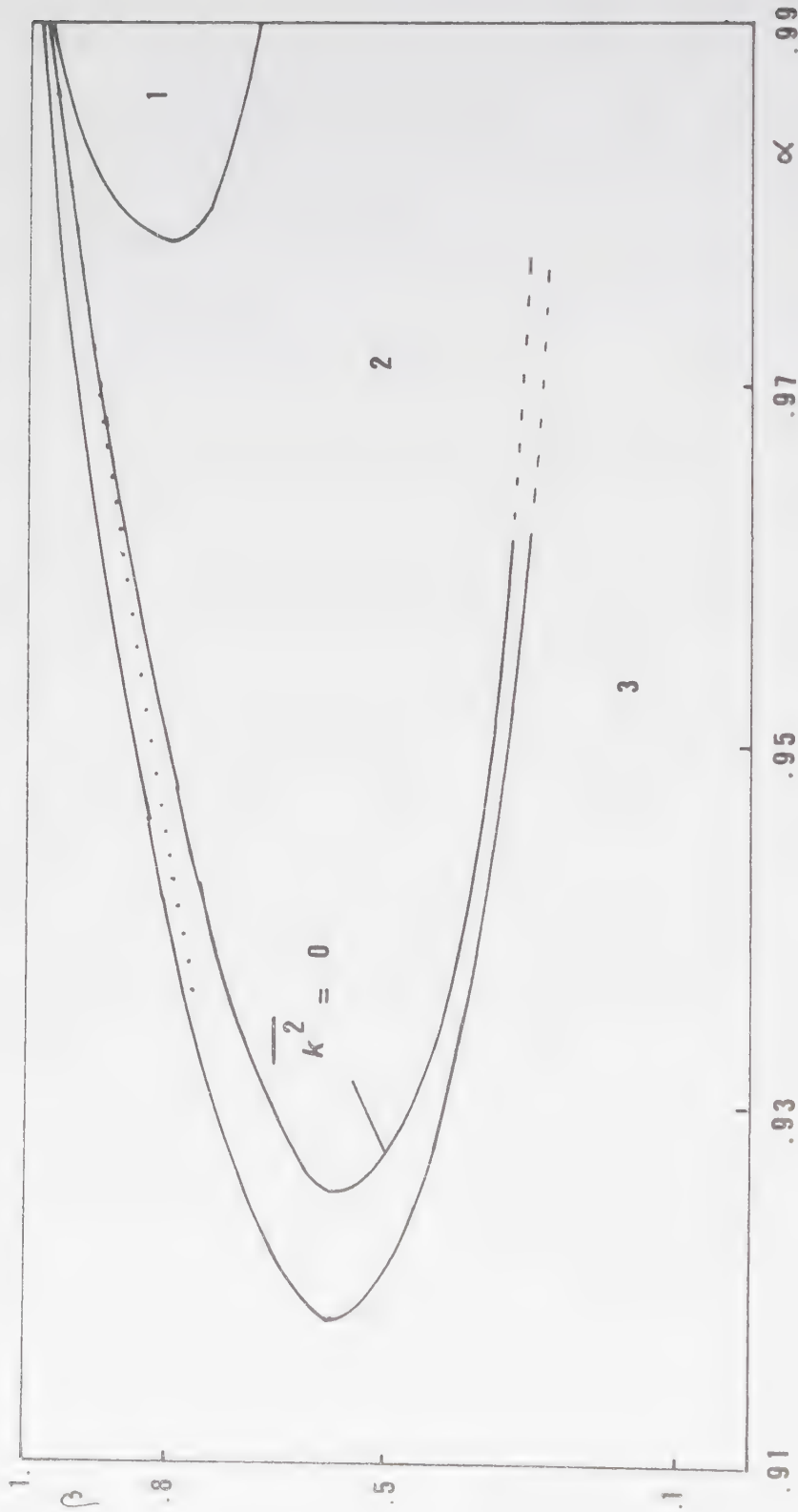


Figure 30:

La courbe en pointillés correspond à la limite au-delà de laquelle la fonction d'essai $f = e^{-\mu x}$ ne convient plus. (les zones instables sont au-dessous de cette courbe)

3) Conclusion : Le calcul des valeurs propres ω^2 pour les équilibres périodiques avec des conditions aux limites sur une période fait apparaître 2 types d'instabilités : d'une part les modes à $\omega^2 < 0$ qui sont toujours présents pour les équilibres du type 1 et les modes à ω^2 complexes. Il en résulte une situation assez compliquée dans le plan (α, β) (γ fixé) : d'autre part, l'étude de la stabilité des équilibres périodiques infinis à l'aide de la théorie du mode marginal adiabatique montre que la condition $\langle k^2 \rangle < 0$ est une condition suffisante d'instabilité. Signalons que le critère de MINARDI peut s'appliquer à ces équilibres, selon ce critère tous les équilibres périodiques infinis sont instables. Les résultats que nous avons obtenus à l'aide des diverses fonctions d'essais semblent confirmer ce résultat.

G STABILITE D'UNE CLASSE D'EQUILIBRES STELLAIRES :

Nous nous proposons de généraliser les résultats obtenus au paragraphe E c'est-à-dire d'étudier la stabilité de systèmes stellaires ayant pour fonction de distribution un multiple Water-Bag. Pour un système de N "bags" nous aurons N coefficients A_i , N coefficients ϵ_i , soit en fixant A_N et ϵ_N , nous aurons $2N - 2$ variables indépendantes. Il est évidemment difficile de manipuler un tel nombre de paramètres, pour cela nous allons nous restreindre à l'étude de la stabilité d'une classe d'équilibres.

1) Construction de l'équilibre : Considérons les équilibres dont la fonction de distribution est :

$$F^{(0)}(\epsilon) = \epsilon^\alpha \exp \left(-\alpha \frac{\epsilon}{\theta} \right) \quad \text{pour } \epsilon \leq 1$$

$$= 0 \quad \text{pour } \epsilon > 1$$
(76)

Cette fonction admet un maximum pour $\epsilon = \theta$. Nous construisons le Multiple Water-Bag de la façon suivante :

+ les énergies ϵ_i sont séparées par des intervalles égaux :

$$\epsilon_i = i \times \frac{1}{N} \quad \text{pour } i = 1, \dots, N$$

+ à l'intérieur d'un intervalle $(\epsilon_i, \epsilon_{i+1})$ la densité de phase est constante et est égale à la valeur de la fonction de distribution $F^{(0)}$ prise au milieu de cet intervalle (Voir Figure 31)

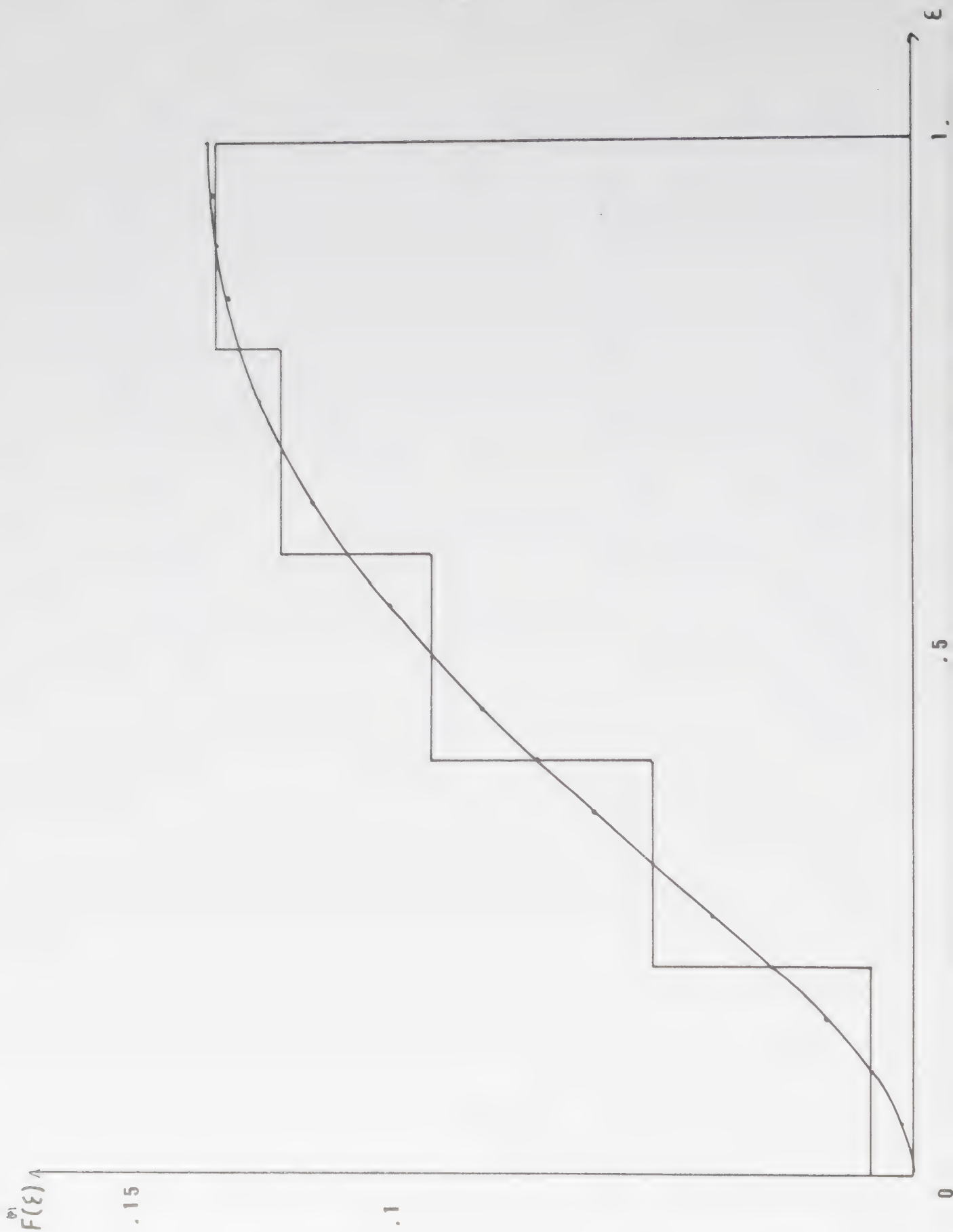


Figure 31:

Approximation de la fonction $F^{(\alpha)}(\epsilon) = \epsilon^\alpha e^{-\alpha\epsilon}$
 par un multiple "Water-Bag" (N=5)

$$A_i = F^{(0)} \left(\frac{\epsilon_i + \epsilon_{i-1}}{2} \right) - F^{(0)} \left(\frac{\epsilon_i + \epsilon_{i+1}}{2} \right) \text{ pour } i = 2, \dots, N-1$$

$$A_1 = F^{(0)} \left(\frac{\epsilon_1}{2} \right) - F^{(0)} \left(\frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} \right) \quad (77)$$

$$A_N = F^{(0)} \left(\frac{\epsilon_N + \epsilon_{N-1}}{2} \right)$$

Il y a évidemment une infinité de manières de construire le multiple Water-Bag à partir de $F^{(0)}(\epsilon)$, celle que nous avons choisie étant la plus simple. Nous ne discuterons pas ici du problème du choix de la méthode de construction, bien que pour certains problèmes et pour un N relativement faible ce choix puisse avoir une importance.

2) Etude de la stabilité : Pour cette étude nous utilisons la méthode exposée au paragraphe D.2. et qui a été employée dans le cas d'un double "Water-Bag". Nous prenons $N = 5$ et nous nous intéressons aux 5 premiers modes : $M = 5$.

Le mode marginal $\omega = 0$ correspondant à une translation du système est toujours présent. Les modes ω^2 sont réels positifs ou complexes. A chaque valeur propre découplée $\lambda_{i\mu}^2$ nous pouvons associer une valeur propre (le premier indice : i correspond au numéro du "bag", le deuxième : μ correspond au rang du mode). Les modes ω^2 sont toujours réels sauf autour des croisements $\lambda_{i\mu}^2 = \lambda_{k\mu}^2$ si $A_i A_k < 0$, ils sont alors complexes conjugués. Les croisements $\lambda_{i\mu}^2 = \lambda_{k\mu}^2$ avec $A_i A_k > 0$ ne produisent pas d'instabilités. Nous voyons donc que pour la fonction de distribution considérée et dans le cas particulier du modèle à 5 bags, le mécanisme de l'instabilité est le même que pour le double Water-Bag. La possibilité d'associer à chaque valeur propre découplée $\lambda_{i\mu}^2$ une valeur propre $\omega_{i\mu}^2$ et les croisements $\lambda_{i\mu}^2 = \lambda_{k\mu}^2$ (avec $A_i A_k < 0$) jouent un rôle fondamental dans ce mécanisme.

Les croisements $\lambda_{i\mu}^2 = \lambda_{k\mu}^2$ (avec $A_i A_k < 0$) ne peuvent avoir lieu que si $\tau_i > \tau_k$. Par conséquent nous pouvons en déduire une condition suffisante de stabilité pour la classe d'équilibres considérée : si la courbe $\tau(\epsilon)$ est monotone croissante le système est stable.

Sur la figure 32 nous avons présenté le diagramme de stabilité pour $\theta = 1$, $0 \leq \alpha \leq 4$.

Pour cette valeur de θ , nous avons $A_1, A_2, A_3, A_4 < 0$ et $A_5 > 0$ car le maximum de la fonction $F^{(0)}(\varepsilon)$ est en $\varepsilon = \theta = 1$. Pour chaque valeur de α nous avons indiqué les $\omega_{i\mu}^2$ complexes (notés par $(i,\mu)S$ pour les modes symétriques et $(i,\mu)AS$ pour les modes antisymétriques)

Dans le cas particulier où $\theta = 1$, A_5 seul est positif par conséquent les seuls croisements produisant des instabilités sont du type $\lambda_{i\mu}^2 = \lambda_{5\mu}^2$ (pour $i = 1, 2, 3, 4$) qui ont lieu pour $\tau_1 > \tau_5$. Pour un i fixé, la grandeur des zones instables augmentent avec μ , c'est-à-dire avec le rang du mode considéré ; de plus, pour un mode de rang μ donné les zones instables augmentent avec i . Il résulte de ceci que, partant de $\alpha = 0$ et en se déplaçant dans le sens des α croissants, les zones instables sont d'abord très petites, pratiquement insignifiantes, elles sont intercalées par les zones stables, puis les zones instables s'élargissent et les zones stables finissent par disparaître. Sur la figure 32 nous voyons que tant que $\alpha < 1.4$ (environ) les zones instables sont très petites, elles deviennent importantes pour $\alpha > 1.4$. De même il existe une valeur limite de α au-delà de laquelle le système est toujours instable : pour $\theta = 1$ cette limite est $\alpha = 1.84$. D'autre part nous voyons que $\tau_1 < \tau_5$ est une condition suffisante de stabilité (toujours pour $\theta = 1$)

D'une façon un peu plus générale, nous avons gardé $N=5$ et avons fait varier θ . Nous avons alors vérifié, pour la classe d'équilibres considérée et uniquement pour celle-ci la condition suffisante de stabilité suivante :

Si pour tout couple (i,j) tel que $i < j$
 $(i = 1, \dots, j-1; j = 2, \dots, N)$ on a
 soit $\tau_i < \tau_j$
 soit $\tau_i > \tau_j$ avec $A_i A_j > 0$, alors le système
 est stable

Par contre s'il existe un seul couple (i,j) avec $i < j$ tel que :
 $\tau_i > \tau_j$ avec $A_i A_j < 0$ alors nous ne pouvons rien conclure.

En effet si $\tau_i > \tau_j$, les croisements $\lambda_{i\mu}^2 = \lambda_{j\mu}^2$ ne peuvent pas se produire ; d'autre part si $\tau_i > \tau_j$, de tels croisements ont lieu mais si

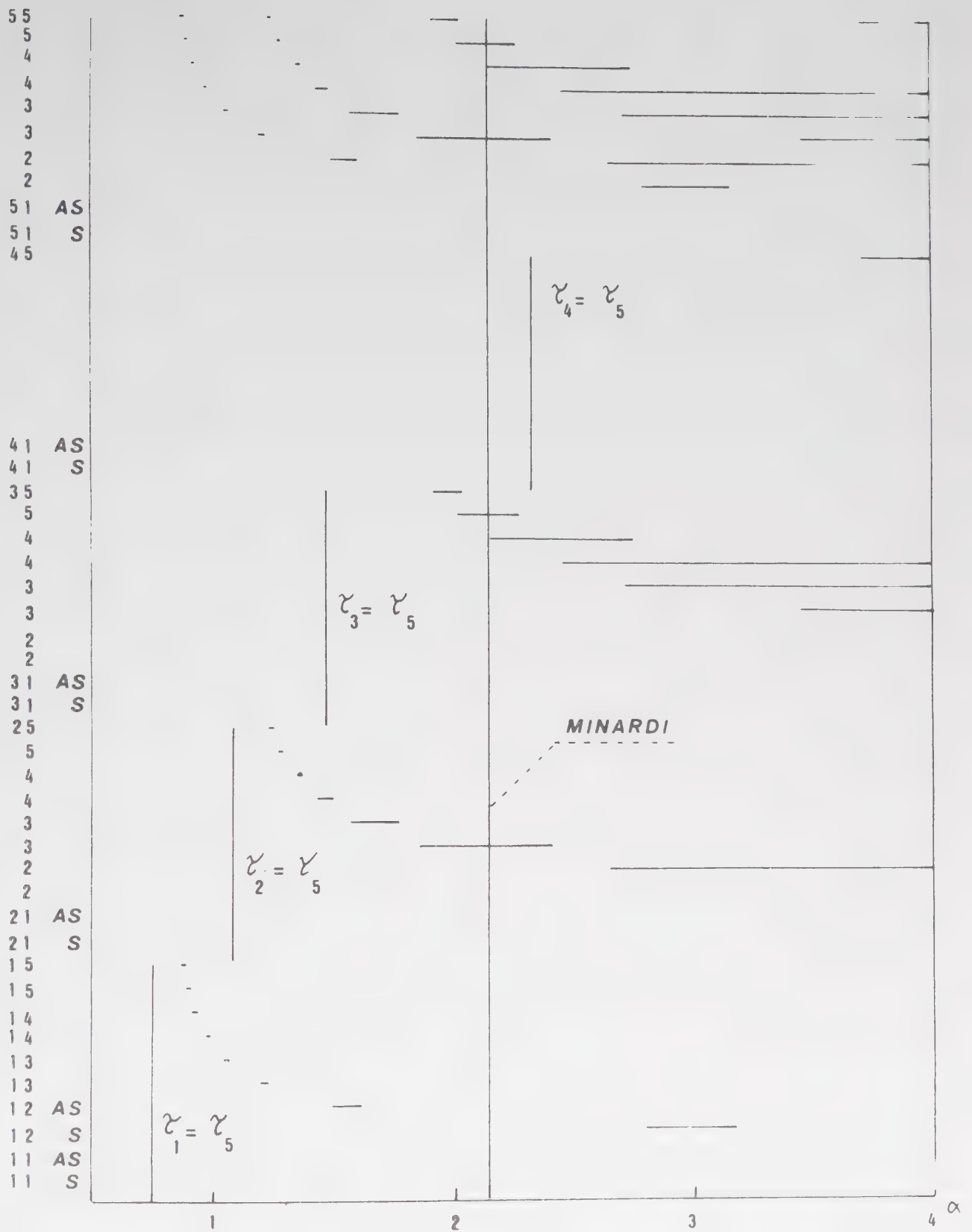


Figure 32:
Modes instable pour α

$A_i A_j > 0$ ils n'engendrent pas de zones instables.

Sur la figure 33 nous avons tracé la courbe limite correspondant à ce critère de stabilité pour $n=5$. Cette courbe est discontinue ; ceci est dû au modèle multiple "Water-Bag" chaque discontinuité ayant lieu lorsque $\theta = \epsilon_i$. Nous avons également tracé la courbe limite du critère d'instabilité de MINARDI. Nous remarquons que pour $\theta = 1$, ce critère est vérifié.

3) Conclusion : L'étude de la stabilité d'une classe d'équilibres stellaires à l'aide du modèle multiple "Water-Bag" a donc permis de faire apparaître une condition suffisante de stabilité.

Il serait évidemment intéressant de poursuivre cette étude de stabilité d'une part en augmentant N , le nombre de "bags", d'autre part en étudiant d'autres classes d'équilibres.

Malheureusement, il semble difficile de passer à des N très grands. En effet pour l'étude de la stabilité d'un équilibre donné le temps de calcul est proportionnel à $(N \times M)^2$. (par exemple sur un ordinateur CII 10070, pour $N = 5$ et $M = 5$ ce temps est de l'ordre de 4 minutes)

H CONCLUSION :

Pour un système inhomogène l'analyse en modes propres conduit à une équation intégrale, l'utilisation du modèle multiple "Water-Bag" permet de remplacer cette équation intégrale par un système de N équations différentielles couplées. (systèmes 26) Dans ce chapitre nous avons présenté 2 méthodes permettant de résoudre ce système :

+ la méthode du mode marginal adiabatique : pour $\omega = 0$, le système d'équations couplées peut se réduire à une seule équation, et il est possible de prévoir l'existence ou non de modes à $\omega^2 < 0$ en étudiant le signe des valeurs propres de l'opérateur

$$K^2(x) = \frac{d^2}{dx^2}$$

Ceci ne s'applique pas aux équilibres stellaires et à ceux de la région 3 (qui correspondent à des équilibres de faisceaux d'accélérateur)

+ la méthode de calcul des fréquences propres ω : chaque équation (26) est associée à un "bag" du système, pour chacune de ces équations nous découplons tout d'abord les différents "bags" en annulant la contribution des champs partiels des autres "bags". Nous obtenons ainsi N équations différentielles

fournissant N bases de fonctions propres orthonormées. Les champs partiels sont ensuite développés dans ces bases ; et les quantités ω^2 cherchées apparaissent comme les valeurs propres d'une matrice (M) .

Le modèle du double "Water-Bag" faisant intervenir un petit nombre de paramètres (2 en Dynamique Stellaire ,3 en Plasmas (ou accélérateurs)) permet une étude complète de la stabilité des équilibres. Pour les Plasmas, ces équilibres sont de 2 catégories :

- + les équilibres périodiques de type 1 et 2 suivant que le contour intérieur reste ouvert ou peut se fermer.

- + les équilibres apériodiques du type 3 où toutes les particules sont piégées. Pour les systèmes stellaires tous les équilibres sont de ce type. Le calcul des fréquences propres ω pour ces équilibres apériodiques montrent que toutes les instabilités ont lieu pour des ω^2 complexes. Pour ces systèmes nous avons obtenu une condition suffisante de stabilité : $\tau_1 < \tau_2$ pour les systèmes stellaires, $\tau_1 > \tau_2$ pour les plasmas et faisceau d'accélérateur. Pour les équilibres périodiques finis nous avons étudié la stabilité de systèmes constitués par une seule période. Les 2 types d'instabilités ($\omega^2 < 0$ et ω^2 complexes) existent.

Pour les équilibres périodiques infinis la méthode du mode marginal adiabatique nous a permis de montrer que les équilibres tels que $\langle k^2 \rangle$ négatif sont instables, et de plus laisse fortement supposer que tous les équilibres périodiques, au moins pour le modèle double Water-Bag, sont instables.

CONCLUSION GENERALE

Pour l'étude des fluides de l'espace des phases décrits par les équations de VLASOV et de POISSON, nous avons systématiquement utilisé le modèle du "Water-Bag". Pour ce modèle la densité est constante à l'intérieur d'un volume de l'espace des phases ; cette propriété reste vraie au cours du temps et les frontières du domaine caractérisent entièrement le système.

Ce modèle présente deux avantages : d'une part il se généralise très facilement, nous pouvons en effet considérer N domaines de l'espace des phases emboîtés les uns dans les autres, la densité de phase étant constante entre les surfaces limitant ces domaines. Ce modèle appelé Multiple "Water-Bag" permet d'approcher aussi exactement qu'on le désire toute fonction de distribution. D'autre part, au cours du temps les domaines restent emboîtés les uns dans les autres, seules les surfaces se déforment. Les équations d'évolution de ces surfaces suffisent donc à caractériser le système et ce modèle permet d'en suivre l'évolution d'une manière tout-à-fait rigoureuse, la seule approximation étant faite au niveau des conditions initiales.

Pour les systèmes dont la fonction de distribution de l'état stationnaire ne dépend que de l'énergie et est telle que $dF^{(0)}/d\epsilon < 0$, ce modèle permet de montrer que l'énergie totale est minimum et que en conséquence ces équilibres sont stables.

Pour les systèmes évoluant sous l'effet de forces radiales uniquement l'utilisation de variables faisant intervenir le moment angulaire I au lieu de la vitesse tangentielle T simplifie l'équation de VLASOV qui devient identique à celle des systèmes plans. Pour l'analyse en modes l'introduction des champs partiels créés par les particules de moment angulaire donné pour chacun des "bags" conduit à un système d'équations couplées identique à celui que l'on obtient pour les systèmes plans. Un traitement analytique permet de montrer que les systèmes tels que $\partial F^{(0)}/\partial \epsilon < 0$ sont stables pour les modes radiaux. Malheureusement pour les modes non radiaux le moment angulaire

n'est plus conservé et cette méthode ne s'applique plus. Pour des perturbations radiales le système d'équations couplées pourrait être utile pour le calcul des fréquences ω du système, dans le cas où toutes les densités partielles A_i ne sont plus positives. Cependant, étant donnée la double décomposition en champs partiels, le nombre d'équations couplées qu'il faudrait prendre en considération serait très élevé et la résolution numérique assez coûteuse.

Le retour à des systèmes unidimensionnels plans permet une généralisation plus aisée. Le modèle du "Water-Bag" permet même avec un petit nombre de paramètres de rendre compte de phénomènes physiques intéressants : 2 "bags" permettent déjà de représenter une fonction de distribution ayant un minimum au centre ; en conséquence le petit nombre de paramètres intervenant dans ce problème rend possible une étude complète de ce cas.

Une généralisation à N "bags" est en principe nécessaire pour traiter le cas général, le système d'équations couplées permettant le calcul des fréquences ω . Nous sommes alors limités par les temps de calculs qui augmentent très rapidement lorsque l'on fait croître le nombre de bags. La limitation est donc d'ordre purement numérique.

La méthode du mode marginal adiabatique qui avait été appliquée avec succès dans un cas particulier laisse supposer que les équilibres périodiques infinis (en Plasma) du double "Water-Bag" sont instables mais ne permet cependant pas de conclure d'une manière définitive et satisfaisante. Il semble que cela soit dû au comportement de la fonction $k^2(x)$ qui présente des discontinuités dans le cas d'un multiple Water-Bag. Ce modèle a été utile pour justifier cette méthode, mais pour l'application de ce critère il n'est plus nécessaire d'utiliser le modèle multiple Water-Bag. Il est alors possible d'appliquer ce critère à d'autres fonctions de distribution par exemple une double maxwellienne.

Pour terminer nous pouvons remarquer que le modèle "Water-Bag" est d'une utilisation très aisée pour les systèmes unidimensionnels plans. Pour les systèmes bi et tridimensionnels, grâce à des hypothèses de symétrie cylindriques ou sphériques ce modèle peut encore s'appliquer. Toutefois, pour des problèmes plus généraux tels que par exemple des études de stabilité non radiales il semble que la mise en oeuvre de ce modèle soit plus

ANNEXE

I CALCUL DE L'EQUILIBRE D'UN MULTIPLE "WATER-BAG" UNIDIMENSIONNEL :

Considérons un système (stellaire ou plasma) à l'équilibre. A l'intérieur de chaque domaine la densité de phase A_i est constante, les contours sont donnés par $V_{\pm,i}^{(0)}(x) = \pm V_i(x) = \pm \left(2\epsilon_i + 2U^{(0)}(x) \right)^{1/2}$

(1)

et on a l'équation de POISSON

$$\frac{d^2 U^{(0)}}{dx^2} = s \sum_{i=1}^N \rho_i^{(0)} = s \sum_{i=1}^N 2A_i \left(2\epsilon_i + 2U^{(0)} \right)^{1/2} - n_i \quad (2)$$

où pour un système stellaire $s = -1$, $n_i = 0$ ($4\pi Gm = 1$); pour un plasma $s = 1$, n_i représente la densité des ions ($e^2/mk_0 = 1$)

L'équation (2) multipliée par

$$\frac{2dU^{(0)}}{dx}$$

donne après intégration

$$\left(\frac{dU^{(0)}}{dx} \right)^2 = s \left(-C + \sum_{i=1}^N 2A_i \left(2\epsilon_i + 2U^{(0)}(x) \right)^{3/2} - 2U^{(0)} n_i \right) \quad (3)$$

où $C = \sum_{i=1}^N 2A_i (2\epsilon_i)^{3/2}$ cette constante s'obtient en écrivant que pour $x = 0$

$$\frac{dU^{(0)}}{dx} = U^{(0)} = 0$$

Il est utile d'introduire les fonctions $\theta_i(x)$ définies par

$$\theta_i(x) = \int_0^x \frac{dx'}{\left(2\epsilon_i + 2U^{(0)}(x') \right)^{1/2}} \quad (4)$$

et nous avons $0 \leq \theta_i(x) \leq \tau_i$ où

$$\tau_i = \int_0^{a_i} \frac{dx}{\left(2\varepsilon_i + 2U^{(0)}(x)\right)^{1/2}} \quad (5)$$

$$(V_i(\pm a_i) = 0)$$

1) Calcul des périodes $\tau(\varepsilon)$ Plus généralement nous définissons les fonctions $\tau(\varepsilon)$ par

$$\tau(\varepsilon) = \frac{1}{4} \oint \frac{dx}{\left(2\varepsilon + 2U^{(0)}(x)\right)^{1/2}} \quad (6)$$

$\tau(\varepsilon)$ représente le quart de la période de rotation d'une particule d'énergie ε . On aura évidemment $\tau_i = \tau(\varepsilon_i)$

Pour le calcul de cette intégrale posons $t = -\frac{U^{(0)}}{\varepsilon}$, il vient alors

$$\tau(\varepsilon) = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1/2} \int_0^1 \frac{1}{\left|\frac{dU^{(0)}}{dx}\right|} \frac{dt}{(1-t)^{1/2}} \quad (7)$$

avec
$$\left|\frac{dU^{(0)}}{dx}\right| = \left(-sC + s \sum_{i=1}^N 2A_i (2\varepsilon_i - 2\varepsilon t)^{3/2} + 2st\varepsilon n_i\right)^{1/2}$$

2) Calcul de l'équilibre : Le problème est de connaître les fonctions $V_i(x)$ définissant les contours. Au lieu de calculer $U^{(0)}(x)$ par résolution de l'équation de POISSON (équation 2) nous avons préféré calculer les fonctions V_i en prenant comme variable

$$t_i = \frac{\theta_i(x)}{\tau_i}$$

ce choix se justifie par le fait que l'équation permettant le calcul des fréquences des "bags" découplés se simplifie en prenant t_i comme variable.

On pose $z_i(t_i) = \frac{-U^{(0)}}{\epsilon_i}$ et on se propose de calculer ces fonctions.

Partant de $z_i(0) = 0$ on effectue le calcul en utilisant la relation

$$z_i(t_i + dt_i) = z_i(t_i) + \left(\frac{dz_i}{dt_i}\right)_{t_i} dt_i + \left(\frac{d^2 z_i}{dt_i^2}\right)_{t_i} \frac{(dt_i)^2}{2} + \left(\frac{d^3 z_i}{dt_i^3}\right)_{t_i} \frac{(dt_i)^3}{3!} + \left(\frac{d^4 z_i}{dt_i^4}\right)_{t_i} \frac{(dt_i)^4}{4!} \quad (8)$$

Avec :

$$\frac{dz_i}{dt_i} = 2 \left(\frac{1}{3\epsilon_i}\right)^{1/2} \tau_i (1-z_i)^{1/2} (\psi_i)^{1/2}$$

$$\psi_i = +s \left[-C + \sum_{j=1}^N 2A_j (2\epsilon_j)^{3/2} \left(1 - \frac{\epsilon_i}{\epsilon_j} z_i \right)^{3/2} - 2n_i \right]$$

$$\frac{d^2 z_i}{dt_i^2} = \frac{2}{3} \frac{\tau_i^2}{\epsilon_i} \left(-\psi_i + (1-z_i) \psi_i' \right)$$

$$\psi_i' = -3\epsilon_i s \sum_{j=1}^N 2A_j (2\epsilon_j)^{1/2} \left(1 - \frac{\epsilon_i}{\epsilon_j} z_i \right)^{1/2}$$

$$\frac{d^3 z_i}{dt_i^3} = \frac{2}{3} \frac{\tau_i^2}{\epsilon_i} \left(-2\psi_i' + (1-z_i) \psi_i'' \right) \frac{dz_i}{dt_i} \quad (9)$$

$$\psi_i'' = \frac{3s}{2} \epsilon_i \sum_{j=1}^N 2A_j (2\epsilon_j)^{3/2} \frac{\epsilon_i}{\epsilon_j} \left(1 - \frac{\epsilon_i}{\epsilon_j} z_i \right) - \frac{1}{2}$$

$$\frac{d^4 z_i}{dt_i^4} = \frac{2}{3} \frac{\tau_i^2}{\epsilon_i} \left(-2\psi_i' + (1-z_i)\psi_i'' \right) \frac{d^2 z_i}{dt_i^2} + \frac{2}{3} \frac{\tau_i^2}{\epsilon_i} \left(-3\psi_i'' + (1-z_i)\psi_i''' \right) \left(\frac{dz_i}{dt_i} \right)^2$$

$$\psi_i''' = -\frac{3}{4} s \epsilon_i \sum_{j=1}^N 2A_j (2\epsilon_j)^{3/2} \left(\frac{\epsilon_i}{\epsilon_j} \right)^2 \left(1 - \frac{\epsilon_i}{\epsilon_j} z_i \right)^{-3/2}$$

Les fonctions V_i sont alors connues par

$$V_i = \left(1 - z_i(t_i) \right)^{1/2} \times (2\epsilon_i)^{1/2} \quad (10)$$

II CALCUL DES VALEURS PROPRES ω^2 DU SYSTEME :

1) Calcul des modes découplés : L'équation des modes découplés (équation 58 du paragraphe 2) que nous rappelons :

$$V_i \frac{d}{dx} \left(V_i \frac{dx_{i\mu}}{dx} \right) + \left(\lambda_{i\mu}^2 - s \omega_i^2(x) \right) x_{i\mu} = 0 \quad (11)$$

se simplifie lorsque l'on utilise la variable $t_i = \frac{\theta_i}{\tau_i}$ et devient :

$$\frac{d}{dt_i} \left(x_{i\mu} \right) + \tau_i^2 \left(\lambda_{i\mu}^2 - s \left(2A_i (2\epsilon_i)^{1/2} \right) (1 - z_i(t_i))^{1/2} \right) x_{i\mu} = 0$$

Pour $i = 1, \dots, N$; $j = 1, \dots, M$

Dans le cas où les particules sont toutes piégées, les conditions aux limites

$$x_{i\mu}(0) = 0.$$

La résolution de ces équations se fait par une méthode de tir associée à la méthode de KUTTA-RUNGE.

Pour les modes de rang élevés, la méthode W.K.B. fournit une bonne approximation :

$$\lambda_{i\mu}^2 = \left(\frac{(2\mu-1)\pi}{2} \right)^2 \frac{1}{\tau_i^2} + s \, 2A_i (2\epsilon_i)^{1/2} \int_0^1 \left(1 - z_i(t_i) \right)^{1/2} dt_i \quad (13)$$

(pour des modes symétriques), pour des modes antisymétriques il faudrait remplacer $(2\mu-1)$ par 2μ)

2) Calcul des valeurs propres ω^2 : Pour le calcul des valeurs propres ω^2 du système il est nécessaire de calculer les produits-scalaires $v_{i\mu, k\gamma}$ définis par

$$v_{i\mu, k\gamma} = \int x_{i\mu} \left(t_i(x) \right) x_{k\gamma} \left(t_k(x) \right) dx \quad (14)$$

Soit en supposant $k < i$

$$v_{i\mu, k\gamma} = \tau_k (2\epsilon_k)^{1/2} \int_0^1 x_{i\mu} x_{k\gamma} \left(1 - z_k(t_k) \right)^{1/2} dt_k \quad (15)$$

Pour calculer ces intégrales il est donc nécessaire de connaître t_i en fonction de t_k :

$$t_i(t_k) = \frac{\tau_k}{\tau_i} \left(\frac{\epsilon_k}{\epsilon_i} \right)^{1/2} \int_0^{t_k} \left(\frac{1 - z_k(t)}{1 - \frac{\epsilon_k}{\epsilon_i} z_k(t)} \right)^{1/2} dt \quad (16)$$

III CALCUL DE L'INTEGRALE DE MINARDI :

Nous devons calculer l'intégrale

$$\Phi = \int (\phi(x) - \bar{\phi}) I(x) dx \quad (17)$$

où $\bar{\phi}$ est la valeur moyenne de $\phi(x)$

Pour un système stellaire $I(x) \equiv \rho^{(0)}(x)$ et $\phi(x) \equiv U^{(0)}(x)$.

Pour un plasma où toutes les particules sont piégées

$$I(x) \equiv \rho^{(0)}(x) \text{ et } \phi(x) \equiv U^{(0)}(x) + \frac{n_i x^2}{2}$$

1) Cas d'un système stellaire : Nous avons

$$\bar{\phi} = \frac{1}{L} \int_0^L \phi(x) dx \quad (18)$$

a) Calcul de L :

on a $dx = \frac{dx}{dU^{(0)}} dU^{(0)}$ ce qui entraîne :

$$L = \int_{-\epsilon_N}^0 \left(\frac{dx}{dU^{(0)}} \right) dU^{(0)} \quad (19)$$

En posant $t = -U^{(0)}/\epsilon_N$ on obtient

$$L = \left(\frac{3}{2} \right) \frac{\epsilon_N}{(2A_N)^{1/2}} \frac{1}{(2\epsilon_N)^{3/4}} \int_0^1 \frac{dt}{Z(t)^{1/2}} \quad (20)$$

$$\text{où } Z(t) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{A_N} \left[\left(\frac{\epsilon_i}{\epsilon_N} \right)^{3/2} - \left(\frac{\epsilon_i}{\epsilon_N} - t \right)^{3/2} \right]$$

b) Calcul de $\bar{\phi}$:

$$\text{on a } \bar{\phi} = \frac{1}{L} \int_{-\epsilon_N}^0 U^{(0)} \frac{dx}{dU^{(0)}} dU^{(0)} \text{ soit :}$$

$$\bar{\phi} = - \frac{1}{L} \frac{\epsilon_N^2}{(2/3)^{1/2}} \frac{1}{(2A_N)^{1/2}} \frac{1}{(2N)^{3/4}} \int_0^1 \frac{t \, dt}{Z(t)^{1/2}} \quad (22)$$

Soit finalement :

$$\bar{\phi} = - \epsilon_N \frac{\int_0^1 \frac{t \, dt}{(Z(t))^{1/2}}}{\int_0^1 \frac{dt}{(Z(t))^{1/2}}} \quad (23)$$

c) Calcul de Φ : L'intégrale Φ est alors donnée par

$$\Phi = (3A_N)^{1/2} (2\epsilon_N)^{3/4} \int_0^1 \frac{(\bar{\phi} + \epsilon_N t) \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{A_N} \left(\frac{\epsilon_i}{\epsilon_N} - t \right) dt}{(Z(t))^{1/2}} \quad (24)$$

2) Cas d'un plasma : Pour un plasma

$$\phi(x) = U^{(0)} + n_i \frac{x^2}{2}$$

on aura donc

$$\Phi = \int (U^{(0)}(x) - \bar{U}^{(0)}) \rho^{(0)}(x) \, dx + \int \frac{n_i}{2} \rho^{(0)}(x) \left(x^2 - \frac{L^2}{3} \right) \, dx \quad (25)$$

La première intégrale se calcule de la même manière que dans le cas d'un système stellaire.

La deuxième intégrale peut s'intégrer 2 fois par parties et il vient :

$$I_2 = + n_i \int U^{(0)}(x) dx - n_i L U^{(0)}(L) + \frac{2L^2}{3} n_i \frac{dU^{(0)}}{dx}(L) + n_i^2 \frac{L^3}{3} \quad (2)$$

soit

$$I_2 = n_i L \left(\bar{U}^{(0)} - U^{(0)}(L) \right) + \frac{2L^2}{3} n_i \frac{dU^{(0)}}{dx}(L) + n_i^2 \frac{L^3}{3} \quad (2)$$

BIBLIOGRAPHIE

- 1- S. CHANDRASEKHAR, 1942, Principles of Stellar Dynamics
- 2- M. LECAR, 1972, Gravitational N-Body Problem, D. Reidel, page 367
- 3- I. BERNSTEIN, J. GREENE, M. KRUSHAL, 1957, Physical Review, 108, 546
- 4- T. H. STIX, 1962, The Theory of Plasma Waves, Mc. Graw Hill
- 5- D. MONTGOMERY, D. GORMAN, 1961, Physical Review, 124, 1309
- 6- W. E. DRUMMOND, D. PINES, 1962, Nuclear Fusion (suppl.), 3, 1049
- 7- P. O. VANDERVOORT, 1971, Astrophysical Journal, 166, 37
- 8- E. INFELD, A. SKORUPSKI, 1971, Astronomy and Astrophysics, 14, 12
voir également références 67,68
- 9- G. L. CAMM, 1950, Monthly Notices of the Roy. Astron. Soc., 110, 305
et 1952, 112, 155
- 10- M. HENON, Numerical Experiments on the Stability of Spherical Stellar
Systems. 1973, Astronomy and Astrophysics, 24, 229
- 11- A. EINSTEIN, 1939, Ann. Math., 40, 922
- 12- A. B. MIKHAILOVSKI, A. M. FRIDMAN, Y. G. EPELBAUM, 1971, SOVIET Physics
JEIP, 32, 878
- 13- M. V. KONYUKOV, 1968, Soviet Physics JEIP, 37, 570
- 14- D. C. DE PACKH, 1962, Journal of Electronics and Control, 13, 417
- 15- P. BERTRAND, M. R. FEIX, 1968, Physics Letters, 28A, 68
- 16- P. BERTRAND, 1972, Thèse Nancy

- 17- L. BERK, K. V. ROBERTS, 1970, Methods in Computational Physics, Vol 9, Academic Press
- 18- M. NAVET, P. BERTRAND, 1971, Physics Letters, 34A, 117
- 19- L. D. LANDAU, 1946, Journal of Physics of U. S. S. R, 10, 25
- 20- D. LYNDEN-BELL, 1962, Monthly Notices of the Roy. Astron. Soc., 124, 279
- 21- D. C. LIN, C. YUAN, F. H. SHU, 1969, Astrophysical Journal, 155, 721
- 22- T. K. FOWLER, 1965, Physics of Fluids, 8, 459 et 2120
- 23- D. LYNDEN-BELL, N. SANITT, 1969, Monthly Notices of the Roy. Astron. Soc. 143, 167
- 24- A. A. ANTONOV, 1960, Soviet Astronomy A J, 4, 859
- 25- R. M. KULSRUD, J. W. K. MARK, 1970, Astrophysical Journal, 160, 471
- 26- E. MINARDI, 1972, Plasma Physics, 14, 427 et 443
- 27- J. M. DAWSON, 1970, Methods in Computational Physics, Vol 9
- 28- F. HOHL, 1967, Collective effects in Plasma Physics and Stellar Dynamics Ph. D. Thesis, the College of William and Mary.
- 29- W. HOCKNEY, 1967, Astrophysical Journal, 150, 797
- 30- F. HOHL, 1967, Symposium on Computer Simulation of Plasmas and Many-Body Problems, NASA SP153
- 31- R. H. MILLER, K. H. PRENDERGAST, 1968, Astrophysical Journal, 151, 699
- 32- F. HOHL, R. W. HOCKNEY, 1969, Journal of Computational Physics, 4, 306

- 33- P. M. CAMPBELL, 1962, Proc. Nat. Acad. Sci. Am. 48, 1933
- 34- M. HENON, 1964, Annales d'Astrophysique, 27, 83
- 35- P. BOUVIER, G. JANIN, 1969, Astronomy and Astrophysics, 5, 127
- 36- G. KNORR, 1963, Z. Naturforsch, 16a, 1304
- 37- J. DENAVIT, W. O. KRUER, 1971, Physics of Fluids, 14, 1782
- 38- T. P. ARMSTRONG, 1967, Physics of Fluids 10, 1269
- 39- F. C. GRANT, M. R. FEIX, 1967, Physics of Fluids, 10, 696 et 1356
- 40- K. F. OGORODNIKOV, 1965, Dynamics of Stellar Systems, Pergamon Press
- 41- V. A. ANTONOV, 1962, Vest. Leningrad. Gos. Univ. 19, 96
- 42- V. A. ANTONOV, 1971, Trudy astr. obs. Leningr. Gos. Univ. 28, 64
- 43- A. M. FRIDMAN, 1971, Soviet Astronomy A J, 15, 250
- 44- A. M. FRIDMAN, 1972, Soviet Astronomy A J, 15, 720
- 45- J. P. DOREMUS, M. R. FEIX, G. BAUMANN, 1970, Astronomy and Astrophysics, 5, 127
- 46- J. P. DOREMUS, M. R. FEIX, G. BAUMANN, 1971, Physical Review Letters, 26, 725
- 47- J. P. DOREMUS, M. R. FEIX, G. BAUMANN
To be published
- 48- G. CONTOPOULOS, 1954, Zeitschrift für Astrophysick, 35, 67
- 49- R. KURTH, 1955, Astronomische Nachrichten, 282, 241
- 50- J. P. DOREMUS, M. R. FEIX, G. BAUMANN, 1972, Astrophysical Letters, 11, 37

- 51- S. GOLDSTEIN, 1971, Astrophysics and Space Science, 13, 387
voir également référence 42.
- 52- M. R. FEIX, J. P. DOREMUS, G. BAUMANN, 1971, Astrophysics and Space Science, 13, 478
- 53- U. FINZI, J. HOLEC, J. P. DOREMUS, 1972 Proceedings of the fifth European Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics. Grenoble 1972, Pages 138 and 245
- 54- J. P. DOREMUS, U. FINZI, J. HOLEC, M. R. FEIX, to be published
- 55- in Gravitational N-Body Problems, 1972, Ed. M. LECAR (D. Reidel publishing company, Dordrecht Holland)
- 56- R. L. MORSE, C. W. NIELSON, 1969, Physics of Fluids, 12, 2418
- 57- U. FINZI, 1972, Plasma Physics, 14, 327
- 58- C. B. WHARTON, J. H. MALMBERG, T. M. O' NEIL, 1968, Physics of Fluids 11, 1761
- 59- W. L. KRUEER, J. M. DAWSON, R. N. SUDAN, 1969, Physical Review Letters, 23, 838
- 60- H. BLOOMBERG, Linearized Theory of inhomogeneous Multiple "Water-Bag" Plasmas, to be published
- 61- M. BLOOMBERG, P. BERTRAND, J. P. DOREMUS, M. R. FEIX, 1970, APS Bulletin, 15, 1430 voir également référence 52.
- 62- P. BERTRAND, J. P. DOREMUS, G. BAUMANN, M. R. FEIX, 1972, Physics of Fluids, 15, 1275
- 63- O. PENROSE, 1960, Physics of Fluids, 3, 258

64- J.P.DOREMUS,M.R.FEIX,1972,Astronomy and Astrophysics,20,259

65-P.M.MORSE,H.FESHBACH,1953,Methods of Theoretical Physics

66-J.HOLEC Thèse de 3^{ème} Cycle en préparation

67-A.E.EDDINGTON,1916,Monthly Notices of the Roy.Soc.,76,572

68-R.V.d.R.WOOLLEY,1954;Monthly Notices of the Roy.Astron.Soc.,114,191

NOM DE L'ETUDIANT : DOREMUS J. Pierre

NATURE DE LA THESE : Doctorat ès Sciences Physiques

VU, APPROUVE

& PERMIS D'IMPRIMER

NANCY, le 8 Juin 1973

LE PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DE NANCY I

J.R. HELLUY



